‘*Mirabilem sane’* доказательство-1637

(*реконструкция* **)**

Представленное Пьером Ферма доказательство случая биквадратов в ‘последней теореме’ (**ПТФ**) не является основанием для сомнений в наличии у него и полного, например такого, где частный случай N= 4 достаточен для завершения доказательства теоремы целиком.

Действительно, достаточно считать в уравнении условия теоремы :

$$X^N + Y^N = Z^N, - \qquad [1]$$

X, Y и Z попарно простыми, N – простым числом или N = 4, - и принять за X слагаемое, взаимно простое с таким N, _ чтобы в форме :

$$Z^N - Y^N = X^N, - \qquad [2]$$

левая часть оказалась произведением двух взаимно простых скобок $(Z - Y)(Z^{N-1} + Z^{N-2}Y + \ldots)$, приравниваемых соответственно двум взаимно простым сомножителям числа X^N в роли независимых параметров :

$$X \equiv QP, \quad P > Q \geq 1, -$$

что порождает необходимое условие существования попарно простой тройки Ферма (**ТФ***, как и **ТФ** – *примитивных* подобий **ТФ* -** с общим множителем) :

$$Z - Y = Q^N \quad при \quad N € [2,\infty), - \qquad [3]$$

и алгебраическое уравнение для Y или Z :

$$(Y + Q^N)^N - Y^N = Q^N P^N = Z^N - (Z - Q^N)^N .$$

При N = 2 решение его представляет собой *старинный рецепт* получения всех оригинальных (попарно простых) троек Пифагора (**ТП*)** :

$$X = qp \ (\text{нечётные взаимно простые}), \quad Y = (p^2 - q^2)/2 , \quad Z = (p^2 + q^2)/2. \qquad [4]$$

Правая часть уравнения $Z^N - Y^N = Q^N P^N$, подобно его левой части, задающей условие [3] тождеством $a^N - b^N \equiv (a - b)(a^{N-1} + a^{N-2}b + \ldots + b^{N-1})$, подчинена *второму* алгебраическому тождеству $4ab \equiv (a + b)^2 - (a - b)^2$, и оно при $a = P^N$, $b = Q^N$ нечётных, как и при $b = Q^N \equiv 4q$, когда чётно $X \equiv QP$ (и нечётны Z, Y, N с P из-за $Z - Y = Q^N$), определяет необходимо :

$$P^N Q^N \equiv A^2 - B^2, - \qquad [5]$$

Форму разности квадратов двух целых чисел для разности $Z^N - Y^N$.

Для $X \equiv QP$ нечётных $A = (P^N + Q^N)/2$, $B = (P^N - Q^N)/2$, $A - B = Q^N$, в случае же X, Q чётных $A = P^N + Q^N/4$, $B = P^N - Q^N/4$, $A - B = Q^N/2$, а в общем виде: $Q^N = k(A - B)$, где $k = 2$ для чётных Q, иначе $k = 1$.

Разнообразие значений $N \in [2,\infty)$ в [1] вынуждает согласовать уравнение $Z^N - Y^N = P^N Q^N$ с тождеством [5] достаточным дополнением :

$$P^N Q^N \equiv (A^2 - W) - (B^2 - W), \qquad [6]$$

где W - функция N и параметров P, Q такая, что в соответствии с [2] :

$$Z^N = A^2 - W \quad \text{и} \quad Y^N = B^2 - W.$$

Необходимое условие существования **ТФ*** [3] принимает вид :

$$Z - Y = Q^N = [A^2 - W)]^{1/N} - [B^2 - W)]^{1/N} = Q^N \quad \text{или}$$

$$\mathbf{F}_{(N,W,A,B,Q)} = [A^2 - W)]^{1/N} - [B^2 - W)]^{1/N} - Q^N = 0 \qquad [7]$$

для $N \in [2,\infty)$ с $W = 0$ при $N = 2$.

Вычислимы две точки функции $\mathbf{F}_{(N,W,A,B,Q)} = [A^2 - W)]^{1/N} - [B^2 - W)]^{1/N} - Q^N$:

$\mathbf{F}_{(1,W,A,B,Q)} = A^2 - B^2 - Q = QP - Q = Q(P-1) > 0$;

$\mathbf{F}_{(2,\,0,\,A,B,Q)} = A - B - Q^2 \equiv 0$ (для X нечётных, когда возможны и чётные N).

Если условию [7] отвечают две точки $(N,W,A,B,Q)_i$, то соединяющая их линия в пространстве этих переменных имеет точку наибольшего отклонения функции $\mathbf{F}$ от нуля - её экстремум.

Этот локальный экстремум является условным, т.к. независимы лишь три в списке переменных функции $\mathbf{F}_{(N,W,A,B,Q)} = \mathbf{F}_{(N,W,A,B)} = \mathbf{F}_{(N,Z,Y,W,A,B)}$.

Необходимое условие её экстремума - в оптимальной форме :

$$\mathbf{F}_{(N,Z,Y,W,A,B)} = Z - Y - k(A - B), -$$

при условии существования троек Ферма по [1] … [5] **:**

$$\boldsymbol{\varphi}_{(N,Z,Y,W,A,B)} = Z^N - Y^N - A^2 + B^2 = 0, -$$

равенство нулю всех частных производных *функции Лагранжа* :

$$\mathbf{L}_{(N,Z,Y,W,A,B)} = \mathbf{F}_{(N,Z,Y,W,A,B)} + \lambda\boldsymbol{\varphi}_{(N,Z,Y,W,A,B)}, \quad \text{где } \lambda \text{ – некое число.}$$

Невыполнимость этого условия несомненна :

$$\mathbf{L'}_A = -k - 2\lambda A = 0 = \mathbf{L'}_B = k + 2\lambda B \quad \text{влечёт невозможное } A - B = 0.$$

Поэтому нулевая точка $\mathbf{F}_{(2,\,0,\,A,B)} = 0$ единственна, и **ПТФ** верна.

Если же Пьер Ферма *остроумно показал*, что уже само *второе* тождество исключает нечётные N из рассмотрения, то для чётных $N = 2m$ достаточно доказать **ПТФ** при $m = 2$, т.е. для биквадратов (со следствием для $N = 4n$), а также при нечётных $m = 2i - 1$.

В последнем случае уравнение $Z^{2m} - Y^{2m} = X^{2m}$ эквивалентно произведению двух уравнений: $Z^m - Y^m = (Q^2)^m$ и $Z^m + Y^m = (P^2)^m$, - где $Q^mP^m = X^m$, а нечётность m обеспечивает справедливость **ПТФ.**

Для $N = 4$ - наряду с *демонстрацией* Пьером Ферма *метода бесконечного спуска* - можно использовать запрет тройкам Пифагора иметь два общих элемента, который вытекает из *второго* тождества $4ab \equiv (a + b)^2 - (a - b)^2$ - далее с обозначениями $S = a + b$ и $R = a - b$, - порождающего все **ТП*** путём подстановки взаимно простых $a > b > 0$ разной чётности, возведённых в чётные степени (так что $a = A^{2i}$, $b = B^{2j}$).

У двух экземпляров **ТП*** - примем для определённости $S_1 > S_2$ - не могут быть общими оба нечётных числа $R_1 < S_1 > S_2 > R_2$, т.к. $S_1 > R_2$, а когда $a_1b_1 = a_2b_2$ - при общем чётном числе, - невозможно и $S_2 = R_1$, т.е. $a_2 + b_2 = a_1 - b_1$, поскольку $b_2 = a_1 - b_1 - a_2$ и $a_1b_1 = a_2(a_1 - b_1 - a_2)$ дают квадратное уравнение $a_2^2 - (a_1 - b_1)a_2 + a_1b_1 = 0$ с дискриминантом

$$D = (a_1 - b_1)^2 - 4a_1b_1.$$

И когда $a_1 = A^2$, $b_1 = B^2$, а $D \equiv q^2p^2$ - квадрат целого :

$$D = (A^2 - B^2)^2 - 4A^2B^2 = q^2p^2,$$

где $p > q > 0$ - нечётные взаимно простые, как и в [4], -

то по [4] имеем $A^2 - B^2 = (p^2 + q^2)/2$; [8]

$$2AB = (p^2 – q^2)/2 \quad \text{или} \quad 4AB = p^2 – q^2, -$$

а последнее - всё по тому же *второму* тождеству - требует :

$$p = A + B , \quad q = A - B, -$$

т.е. $A^2 - B^2 = pq$, что с учётом [8] :

$$pq = (p^2 + q^2)/2 \text{ , так что } p – q = 0 \text{ и } AB = 0.$$

Если же дискриминант D не является квадратом целого числа, то и a_2, и a_2^2 - суммы ненулевых иррационального и целого чисел.

Поэтому две разные **ТП*** не могут иметь два общих элемента, что прямо следует из *указанной* Пьером Ферма невозможности представить квадратом разность биквадратов $Z^4 - Y^4 = (Z^2 + Y^2)(Z^2 – Y^2) \neq (PQ)^2$, - или, *наоборот*, доказывает оба его утверждения по поводу этой разности.

Аннотация. Уравнение «последней теоремы» Пьера Ферма (**ПТФ**) приводится к форме $Z^N - Y^N = X^N \equiv Q^N P^N$, подчиняющейся двум тождествам элементарной алгебры, которые задают необходимое условие существования «троек Ферма», выполнимое только при $N = 2$, что следует из отсутствия экстремумов у этой функции, обеспечивающего единственность точки соответствия условию.