О тройках Ферма и Пифагора

'Последняя' теорема Pierre de Fermat - по тексту *Donald E.Knuth* :

« если n - целое число, $n > 2$, то уравнение $x^n + y^n = z^n$

неразрешимо в целых положительных числах x, y, z» .

Для доказательства выпишем все доступные линейные множители разложений исходного уравнения тождественными преобразованиями :

$$x^n = z^n - y^n \equiv P_xQ_x, \quad \text{где} \quad P_x = z - y ;$$

$$y^n = z^n - x^n \equiv P_yQ_y, \quad \text{где} \quad P_y = z - x , -$$

и только для <u>нечётных</u> **n** -

$$z^n = x^n + y^n \equiv P_zQ_z, \quad \text{где} \quad P_z = x + y .$$

Конкретному набору x, y, z и P_j отвечает <u>единственный</u> набор Q_j .

При **n** <u>нечётном</u> :

$$P_x + P_y + P_z = 2z \quad \sim \quad P_xQ_x + P_yQ_y - P_zQ_z = 0 \quad , -$$

и для натуральных $Q_xQ_yQ_z \geq 1$ он оказывается тривиальным :

$$P_x(Q_x - 1) + P_y(Q_y - 1) + P_z(- Q_z - 1) = - 2z \quad \Rightarrow$$

$$Q_x = Q_y = Q_z = 1 ; \quad P_z = z ; \quad x + y = z , \quad \text{т.е.} \quad n = 1 , -$$

нечётные *тройки Ферма* не существуют.

Чётность показателя $\mathbf{n} = 2\mathbf{k}$ в $\mathbf{z}^{2k} - \mathbf{y}^{2k} = \mathbf{x}^{2k}$ видоизменяет список линейных множителей :

$$\mathbf{x}^{2k} = \mathbf{z}^{2k} - \mathbf{y}^{2k} \equiv P_x Q_x R_x, \quad \text{где} \quad P_x = \mathbf{z} - \mathbf{y}, \quad Q_x = \mathbf{z} + \mathbf{y};$$

$$\mathbf{y}^{2k} = \mathbf{z}^{2k} - \mathbf{x}^{2k} \equiv P_y Q_y R_y, \quad \text{где} \quad P_y = \mathbf{z} - \mathbf{x}, \quad Q_y = \mathbf{z} + \mathbf{x},$$

так что $\mathbf{z}^2 - \mathbf{y}^2 = P_x Q_x$; $\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^2 = P_y Q_y$, -

и далее :

$$P_x Q_x + P_y Q_y = 2\mathbf{z}^2 - (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) \quad \sim \quad P_x Q_x R_x + P_y Q_y R_y = \mathbf{z}^{2k} ,$$

т.е.

$$P_x Q_x (R_x - 1) + P_y Q_y (R_y - 1) = \mathbf{z}^{2k} - 2\mathbf{z}^2 + (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) \quad \Rightarrow$$

имеется тривиальное решение - без видимых оснований считать его не единственным:

$$R_x = R_y = 1 ; \quad \mathbf{z}^{2k} = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 ; \quad 2k = n = 2 , -$$

чётные *тройки Ферма* существуют лишь как пифагоровы.

<u>Примечание.</u>

$\mathbf{x}^n = \mathbf{z}^n - \mathbf{y}^n \equiv P_x Q_x$, где $P_x = \mathbf{z} - \mathbf{y}$, для $\mathbf{n} = 2$ даёт древний алгоритм вычисления *троёк Пифагора* при $P_x \equiv p^2$; $Q_x \equiv q^2$ (нечётны, взаимно просты) :

$$\mathbf{x} = qp; \quad 2\mathbf{y} = q^2 - p^2; \quad 2\mathbf{z} = q^2 + p^2, -$$

со следствиями, включая :

1. *квадрат чётного числа не может быть представлен суммой двух взаимно простых квадратов ;*

2. *две тройки Пифагора* $(\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1)$ и $(\mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{z}_2)$ *не могут иметь ровно два общих элемента.*

Последнее обеспечивает строгое доказательство теоремы при <u>чётных **n**</u> , но ни **T.Verhoeff,** выведший в **1988** г. следствие-**2** *методом спуска* :

http://www.mathmeth.com/tom/files/pyth.pdf , -

ни Пьер де Ферма, приведший доказательство для **n = 4** … «по соседству», <u>*явно*</u>, лишь для иллюстрации *этого своего изобретения, …* промолчали ...

* * *