МГУ имени М.В. Ломоносова

Экономический факультет

Математический Анализ

1 семестр. Часть 2

Учебно-методическое пособие

подготовлено Тесленко М.А.

на основе лекций,

прочитанных Черемных Ю.Н.

г. Москва

2011

Оглавление

Вопрос №1. Определение предела функции по Коши.

Дадим определения предела для различных случаев (по Коши).

$$\left\{ \lim_{x^{\cdot} \to +\infty} f(x) = b, b \in \mathrm{E}_1 \right\} \overset{def}{=}$$

$$= \forall \varepsilon > 0 \, \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) : \forall x \in M_f \{x > \Delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon\}$$

$$\left\{ \lim_{x^{\cdot} \to +\infty} f(x) = +\infty \right\} \overset{def}{=}$$

$$= \forall E > 0 \, \exists \Delta = \Delta(E) > 0 : \forall x \in M_f \{x > \Delta \Rightarrow f(x) > E\}$$

$$\left\{ \lim_{x \to x^0 - 0} f(x) = b, b \in \mathrm{E}_1 \right\} \overset{def}{=}$$

$$= \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x^0) > 0 : \forall x \in M_f \{0 < x^0 - x < \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon\}$$

$$\left\{ \lim_{x \to x^0 + 0} f(x) = b, b \in \mathrm{E}_1 \right\} \overset{def}{=}$$

$$= \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x^0) > 0 : \forall x \in M_f \{0 < x - x^0 < \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon\}$$

$$\left\{ \lim_{x \to x^0} f(x) = b, b \in \mathrm{E}_1 \right\} \overset{def}{=}$$

$$= \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x^0) > 0 : \forall x \in M_f \{0 < | x^0 - x | < \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon\}$$

Вопрос №2. Отрицание для определения предела функции по Коши.

Запишем отрицания к определениям из №1 в позитивной форме.

$$\left\{ \lim_{x^{\cdot} \to +\infty} f(x) \neq b, b \in \mathrm{E}_1 \right\} \overset{def}{=}$$

$$= \exists \varepsilon > 0 : \forall \Delta > 0 \, \exists x = x(\Delta) \in M_f \{x > \Delta \Rightarrow | f(x) - b | \geq \varepsilon\}$$

$$\left\{ \lim_{x^{\cdot} \to +\infty} f(x) \neq +\infty \right\} \overset{def}{=}$$

$$= \exists E > 0 : \forall \Delta > 0 \; \exists x = x(\Delta) \in M_f \{ x > \Delta \Rightarrow f(x) - b \leq E \}$$

Вопрос № 3. Определение предела функции по Гейне.

$$\left\{ \lim_{x \to x^0} f(x) = b, x^0 \in M'_f \right\} \overset{def}{=}$$

$\forall x(n)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \forall n \in N \; x(n) \in M_f \in E_1$$

$$2) \forall n \in N \; x(n) \neq x_0$$

$$3) \lim_{n \to \infty} x(n) = x_0$$

Функция $f(x(n))_{n=1}^{\infty}$ такова, что существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x(n))$, который равен **b**.

Вопрос №4. Отрицание определения предела функции по Гейне.

$$\left\{ \lim_{x \to x^0} f(x) \neq b, x^0 \in M'_f \right\} \overset{def}{=}$$

$\forall x(n)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \forall n \in N \; x(n) \in M_f \in E_1$$

$$2) \forall n \in N \; x(n) \neq x_0$$

$$3) \lim_{n \to \infty} x(n) = x_0$$

Функция $f(x(n))_{n=1}^{\infty}$ такова, что предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x(n)) \neq b$.

Вопрос №5. Теорема о бесконечно малом хвосте функции (доказательство).

Теорема: Для того чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)-b=\beta_x$, где β_x – бесконечно малая функция при $x\to\infty$

Необходимость: Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, тогда $\beta_x = f(x)-b$ – бесконечно малая функция при $x\to+\infty$.

Доказательство: По определению:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\Delta=\Delta(\varepsilon):\forall x\in M_f\,\{x>\Delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\}$$

Пусть $f(x)-b=\beta_x$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\Delta=\Delta(\varepsilon):\forall x\in M_f\,\{x>\Delta\Rightarrow|\beta_x|<\varepsilon\}$$

Следовательно β_x – бесконечно малая функция, ч.т.д

Достаточность: Пусть $\beta_x = f(x)-b$ – бесконечно малая функция. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

Доказательство: β_x – бесконечно малая функция при $x\to+\infty$, тогда по определению:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\Delta=\Delta(\varepsilon):\forall x\in M_f\,\{x>\Delta\Rightarrow|\beta_x|<\varepsilon\}.$$

Пусть $f(x)=b+\beta_x$.

Тогда:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\Delta=\Delta(\varepsilon):\forall x\in M_f\,\{x>\Delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\}.$$

Значит по определению $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, ч.т.д.

Вопрос №6. Теоремы о пределе суммы, произведения и дроби функций.

Теорема (о пределе суммы функций): Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$ имеют общую область определения M_f. Пусть при $x \to x^0$ $\lim\limits_{x \to x^0} f_1(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x \to x^0} f_2(x) = b_2$. Тогда $\lim\limits_{x \to x^0} [f_1(x) + f_2(x)] = b_1 + b_2$

Теорема (о пределе произведения функций): Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$ имеют общую область определения M_f. Пусть при $x \to x^0$ $\lim\limits_{x \to x^0} f_1(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x \to x^0} f_2(x) = b_2$. Тогда $\lim\limits_{x \to x^0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = b_1 \cdot b_2$

Теорема (о пределе дроби функций): Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$ имеют общую область определения M_f. Пусть при $x \to x^0$ $\lim\limits_{x \to x^0} f_1(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x \to x^0} f_2(x) = b_2 \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to x^0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$

Теорему можно распространить на конечное число функций. Стоит отметить, что обратные теоремы неверны. Приведём контрпримеры:

- $f_1(x) = \dfrac{x}{x-5}$; $f_2(x) = \dfrac{-5}{x-5} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 5} (f_1(x) + f_2(x)) = 1$, однако конечные пределы по отдельности не существуют.
- $f_1(x) = \dfrac{1}{x-5}$; $f_2(x) = x - 5 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 5} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = 1$, однако конечного предела первой функции не существует.
- $f_1(x) = \dfrac{1}{x-5}$; $f_2(x) = \dfrac{1}{x-5} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$, однако конечные пределы по отдельности не существуют.

Вопрос № 7. Определение непрерывной функции (по Коши, по Гейне), наглядная иллюстрация.

Пусть дана функция $f(x)$, $x \in \mathrm{M}_y, x^0 \in \mathrm{M}_y \cap \mathrm{M}'_y$. Определение: Функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0, если её предельное значение равно её частному значению в точке x^0, то есть $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f\left(x^0\right)$, где x^0 – точка непрерывности.

Определение (по Коши):

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x^0) > 0 : \forall \mathrm{x} \in \mathrm{M_f} \left\{ | x - x^0 | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x^0) | < \varepsilon \right\}$$

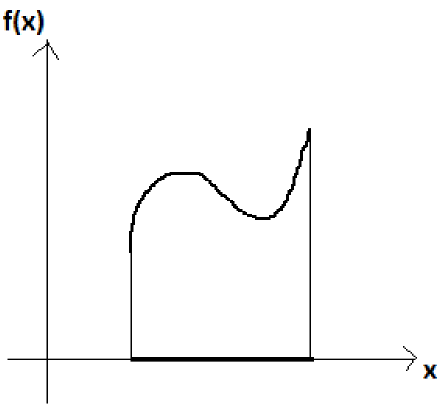
Определение (по Гейне):

Пусть

$$\forall \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : \begin{cases} \forall n \in N \to x(n) \in M_f \\ \lim\limits_{n \to \infty} x(n) = x^0. \end{cases}$$

Тогда $\{f(x(n))\}_{x=1}^{\infty} \to f(x^0)$

Если функция непрерывна в каждой точке множества, то она *непрерывна в* этом *множестве*.



Вопрос №8. Классификация точек разрыва.

Определение: Если в точке x^0 функция $f(x)$ имеет предел слева и предел справа, и они равны между собой, но не равны значению функции в точке x^0, то есть $\lim\limits_{x\to x^0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x^0+0} f(x)\neq f(x^0)$ то точка x^0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$.

Определение: Если в точке x^0 функция $f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, но они не равны между собой $\lim\limits_{x\to x^0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x^0+0} f(x)$, то точка x^0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$.

Определение: Если в точке x^0 функция $f(x)$ имеет бесконечный предел слева или справа или один из этих пределов не существует, то точка x^0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$.

Вопрос №9. Теоремы о непрерывности суммы, произведения и дроби непрерывных функций.

Теорема: (о сумме, произведении и дроби непрерывных функций): Пусть $f_1(x), f_2(x)\in C^{(0)}(\mathrm{M}_f)$ (то есть принадлежат классу непрерывных функций), тогда $f_1(x)+f_2(x),\ f_1(x)\cdot f_2(x),\ \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\in C^{(0)}$ (для случая дроби $f_2(x)\neq 0$)

Стоит отметить, что возможна непрерывность как в точке, так и в области определения (на множестве). Теорему можно распространить на конечное число функций. Обратная теорема неверна, приведём контрпримеры:

- Пусть $\left(f_1(x)+f_2(x)\right)\in C^{(0)},\ f_1(x)=\dfrac{1}{x-5};\ f_2(x)=\dfrac{-1}{x-5}$, но $f_1(x)\notin C^{(0)}$

- Пусть $\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)\in C^{(0)}$, $f_1(x)=\frac{x}{x}$; $f_2(x)=1$, но $f_1(x)\notin C^{(0)}$
- Пусть $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\in C^{(0)}$, $f_1(x)=\frac{x}{x}$; $f_2(x)=1$, но $f_1(x)\notin C^{(0)}$

Вопрос №10. Теорема о непрерывности сложной функции. Теорема о предельном переходе в сложной функции.

Теорема (о непрерывности сложной функции):

Пусть $g(x)\in C^{(0)}(x^0)$, $g(x^0)=U^0$, $f(U)\in C^{(0)}(U^0)$.

Тогда $f(g(x))\in C^{(0)}(x^0)$

Теорема (о предельном переходе в сложной функции):

Пусть $\lim\limits_{x\to x^0} g(x)=a, a\in E_1, f(U)\in C^{(0)}(a)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x^0} f(g(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x^0} g(x)\right)$

Вопрос №11. Непрерывность функции y = sin(x) (доказательство).

Для того, чтобы доказать непрерывность синуса в точке $x=0$ докажем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1: Пусть $|x|<\frac{\pi}{2}$, тогда $|\sin x|=\sin|x|$

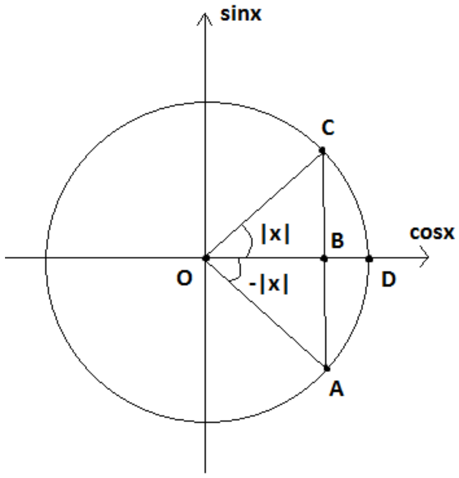
Доказательство:

При $x\geq 0$, $\sin x\geq 0\to|\sin x|=\sin x=\sin|x|$

При $x<0$, $\sin x<0\to|\sin x|=-\sin x>0$

При $x<0$, $-x>0\to|x|>0\to\sin|x|>0$

Получили, что $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x = |\sin x|$, ч.т.д.



Утверждение 2: Пусть $|x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда $|\sin x| \le |x|$

$|ADC| = 2|x|$

$|ABC| = 2\sin|x|$

$|ABC| \le |ADC| \to \sin|x| \le |x|$, *ч.т.д.*

Исходя из двух доказанных утверждений, $|\sin x| \le |x| \to -|x| \le |x|$. С другой стороны нам известно, что если $\forall x \in M_f\ f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x), \lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = b, b \in E_1,$ то $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = b$ (теорема о «двух милиционерах»). Получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0, \sin x \in C^{(0)}(0)$

Докажем непрерывность синуса в произвольной точке $x^0 . \forall x^0 \in E_1$, и при $x \to x^0$ выполняется следующее:

$$|\sin x - \sin x^0| = 2\cdot\left|\sin\frac{x-x^0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x^0}{2}\right| \le 2\cdot\left|\frac{x-x^0}{2}\right| = |x-x^0|$$

$$0 \le |\sin x - \sin x^0| \le |x - x^0|$$

По теореме о «двух милиционерах»:

$$\lim_{x\to x^0}\left(\sin x - \sin x^0\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x^0} \sin x = \sin x^0 \Rightarrow \sin x \in C^{(0)}(x^0), \text{ч.т.д.}$$

Вопрос №12. Непрерывность функций y = tg(x) и y = ctg(x) (доказательство).

$tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. По теореме о непрерывности дроби можем утверждать, что tgx и $ctgx$ – непрерывные функции на своей области определения (кроме тех точек, в которых их знаменатели (соответственно) обращаются в ноль).

Вопрос №13. Непрерывность функции y = e^x (доказательство).

Теорема: $\forall x^0 \in \mathrm{E}_1,\ e^x \in C^{(0)}(x^0)$

Доказательство:

$$\lim_{x\to x^0}(e^x - e^{x_0}) = e^x \cdot \lim_{x\to x^0}(e^{x-x^0} - 1) = \left[x - x^0 = t\right] = e^{x_0} \cdot \lim_{t\to 0}(e^t - 1) = 0,$$

ч.т.д.

Вопрос №14. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Теорема: Пусть функция $f(x)$ строго возрастает на промежутке $(a;b)$ и непрерывна в промежутке $(a;b)$. Тогда область значений этой функции есть промежуток $(A;B) \subseteq \mathrm{E}_1$.

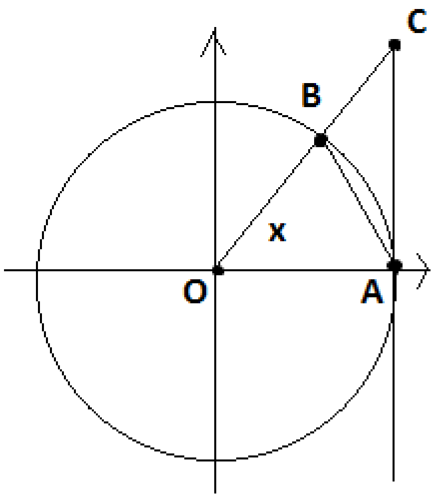
Существует функция $g(x)$ обратная для $f(x)$, определённая в промежутке $(A;B)$, которая строго возрастает на этом промежутке и непрерывна на нём.

Вопрос №15. Первый замечательный предел (доказательство).

Теорема: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство:

Рассмотрим площади треугольников:



$$S_{\Delta OBA} < S_{OBA} < S_{\Delta OCA}$$

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

По теореме о «двух милиционерах» получаем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, ч.т.д.

Можем обобщить для α(x) – бесконечно малой функции при $x \to x^0$:

$$\lim_{x\to x^0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Вопрос №16. Второй замечательный предел (доказательство).

<u>Теорема:</u> $\lim\limits_{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(1^\infty\right) = e$

<u>Доказательство:</u> Сначала докажем, что $x_{n+1} > x_n$, где $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Имеем:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n\cdot(n+2)}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

Нам известно неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$ для $x>-1$. Поэтому можем перейти к неравенству следующим образом:

$$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Неравенство $y_{n+1} < y_n$, где $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ доказывается аналогично.

В итоге имеем: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Используя теорему Вейерштрасса и теорему о «двух милиционерах»

получаем: $\lim\limits_{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1^\infty) = e$ ($e = 2{,}718281828$).

Непрерывные версии второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ и } \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

Если же $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то при $x \to x^0$

$$\lim_{x\to x^0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e$$

Вопрос № 17. Третий и четвёртый замечательный предел (доказательство).

Третий замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1, \text{ ч.т.д.}$$

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция: $\lim\limits_{x\to x^0}\dfrac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1$

Четвёртый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Доказательство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\begin{bmatrix} e^x-1=t \\ x=\ln(t+1)\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1,\text{ ч.т.д.}$$

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция: $\lim\limits_{x\to x^0}\dfrac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1$

Вопрос №18. Пятый замечательный предел (доказательство).

Пятый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^k-1}{kx}=1,\ k\in \mathrm{E}_1$

Доказательство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{kx}=\left[(1+x)^k=e^{k\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{k\ln(1+x)}\cdot\frac{k\ln(1+x)}{kx}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{k\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{k\ln(1+x)}{kx}=\begin{bmatrix} k\ln(1+x)=t \\ x\to 0\Rightarrow \ln(1+x)\to 0\Rightarrow t\to 0\end{bmatrix}=,$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1\ \text{ ч.т.д.}$$

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция: $\lim\limits_{x\to x^0}\dfrac{(1+\alpha(x))^k-1}{k\cdot\alpha(x)}=1$

Вопрос №19. Точка глобального максимума (минимума). Глобальный максимум (минимум) функции.

Пусть дана функция $f(x)$, $x \in M_f \subset E_1$.

Определение: число или точка $x^0 \in M_f$ называется точкой глобального максимума $f(x)$ на M_f, если $\forall x \in M_f \Rightarrow f(x^0) \geq f(x)$. Здесь $a = f(x^0)$ – глобальный максимум функции f(x).

Определение: число или точка $x^0 \in M_f$ называется точкой глобального минимума $f(x)$ на M_f, если $\forall x \in M_f \Rightarrow f(x^0) \leq f(x)$. Здесь $a = f(x^0)$ – глобальный минимум функции $f(x)$.

Вопрос №20. Теорема Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса: Пусть $f(x) \in C^{(0)}[a;b]$. Тогда $\exists x^{\vee} \in [a;b]$, которая является точкой глобального максимума на $[a;b]$.

Необходимость: Для того чтобы функция была непрерывна на отрезке, необходимо, чтобы она имела глобальный максимум и глобальный минимум на этом отрезке.

Достаточность: Для того чтобы функция имела глобальный максимум и глобальный минимум на отрезке, достаточно, чтобы функция была непрерывна на этом отрезке.

Если функция разрывна хотя бы в одной точке, то теорема может не иметь места (пример – гипербола на отрезке $[-1;1]$, доопределённая при $x = 0$ нулём).

Если мы рассматриваем интервал или полуинтервал, то теорема не выполняется (прямая, не параллельная оси OX).

Вопрос № 21. Теоремы Больцано-Коши.

Теорема 1 (Больцано-Коши):

Пусть $\begin{matrix} 1) f(x) \in C^{(0)}(a;b) \\ 2) x^1 \in (a;b), x^2 \in (a;b) \\ 3) f(x^1) \neq f(x^2) \\ 4) \eta \in \left(f(x^1); f(x^2)\right) \end{matrix}$. Тогда $\exists \xi \in (a;b)$ в которой $f(\xi) = \eta$

Если функция разрывна, то выбранное значение функции η (например) может приниматься лишь в точке разрыва, теорема неверна.

Теорема 2 (Больцано-Коши):

Пусть $\begin{matrix} 1) f(x) \in C^{(0)}[a;b] \\ 2) f(a) \cdot f(b) < 0 \end{matrix}$. Тогда $\exists c \in [a;b]: f(c) = 0$

Если произведение больше нуля, то графиком функции может быть парабола, ветви которой направлены вверх и вершина которой лежит выше оси OX. Такая функция вообще не имеет нулей.

Вопрос №22. Равномерно непрерывная функция. Не равномерно непрерывная функция. Теорема Кантора.

Определение: функция $f(x), x \in M_f \subseteq E_1$, называется равномерно непрерывной, на множестве M_1, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \mathrm{x}_1 \in M_f, \forall \mathrm{x}_2 \in M_f \begin{Bmatrix} |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \end{Bmatrix}$$

Обозначение: $f(x) \in UC^{(0)}(M_f)$

Сформулируем отрицание в позитивной форме:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta \, \exists \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_1(\delta) \in M_f, \exists \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_2(\delta) \in M_f \begin{Bmatrix} |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \geq \varepsilon \end{Bmatrix}$$

Теорема Кантора: Пусть $f(x) \in C^{(0)}[a;b]$. Тогда $f(x) \in UC^{(0)}[a;b]$

Вопрос №23. Производная функции в точке (конечная, бесконечная). Не существование производной в точке. Вертикальная, наклонная, горизонтальная касательная к графику функции в точке (x; f(x)).

Определение: производной функции $f(x)$ в точке x^0 называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента, стремящемся к нулю:

$$f'(x^0) = \lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0}.$$

Если предел отношения существует и конечен, то говорят, что f(x) в точке x^0 имеет конечную производную, которая равна

$$\lim_{x \to x^0} \frac{\Delta f(x^0)}{\Delta x^0}, f(x) \in D^{(1)}(x^0).$$

Если предел отношения существует и бесконечен, то говорят, что $f(x)$ в точке x^0 имеет бесконечную производную – $f'(x^0) = \infty$.

Если $\lim\limits_{x \to x^0} \frac{\Delta f(x^0)}{\Delta x^0} \neq \infty$ и $\lim\limits_{x \to x^0} \frac{\Delta f(x^0)}{\Delta x^0} \neq b$, то говорят, что $f(x)$ в точке x^0 не имеет ни конечной, ни бесконечной производной.

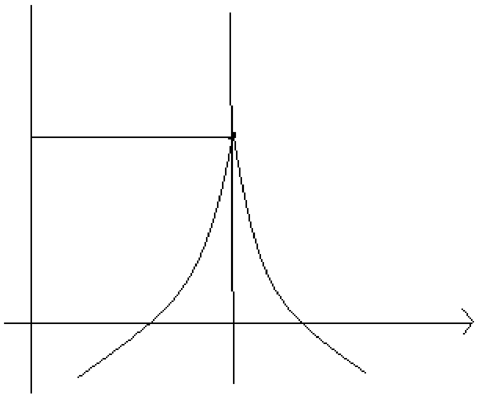
Если $f(x)$ имеет в точке x^0 конечную производную, то график функции $f(x)$ в точке $A(x^0; f(x^0))$ имеет не вертикальную касательную.

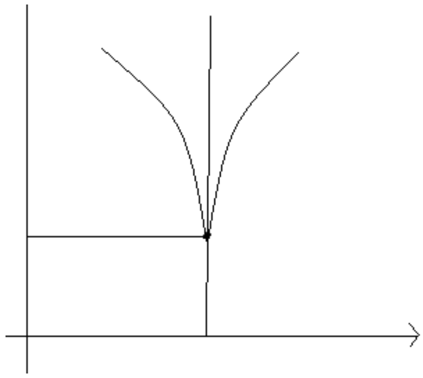
Если $f(x)$ имеет в точке x^0 бесконечную производную, то график функции $f(x)$ в точке $A(x^0; f(x^0))$ имеет вертикальную касательную.

Уравнение невертикальной касательной к графику функции $f(x)$ в точке A: $y = f(x^0) + f'(x^0) \cdot (x - x^0)$

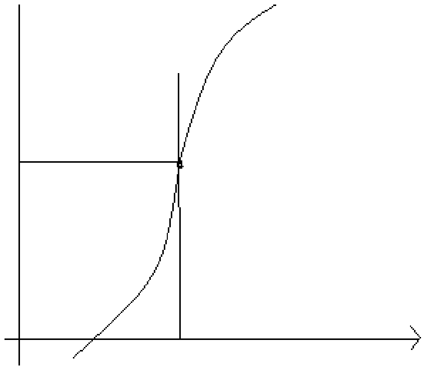
Вопрос № 24. Вертикальные касательные – «клювы», вертикальный перегиб, «угловые» точки.

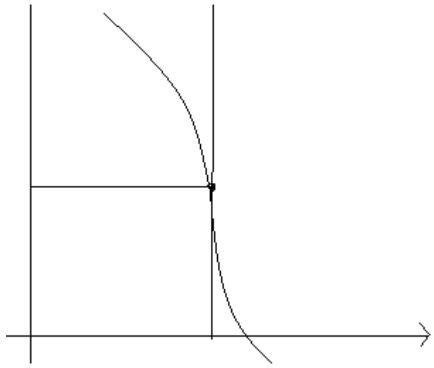
Вертикальные касательные в случае «клюва»:



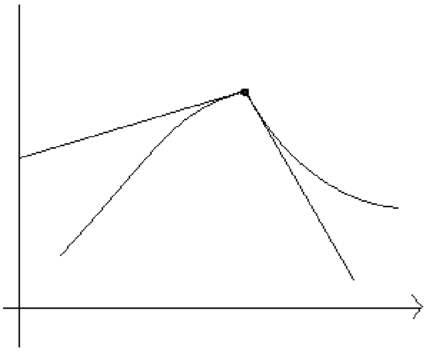


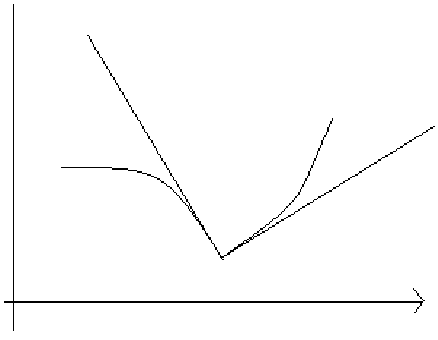
Вертикальные касательные в случае вертикального перегиба:





Вертикальные касательные в случае «угловых» точек:





Вопрос №25. Приближённое представление конечной производной. Предельная и точечная эластичность функции.

Конечная производная – это результат предельного перехода:

$$\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}=\lim_{x\to x^0}\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}+\alpha(x;x^0)$$

$$\alpha(x^0;x^0)=0$$

$$\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}\approx\lim_{x\to x^0}\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}$$

$$\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}\approx f'(x^0)$$

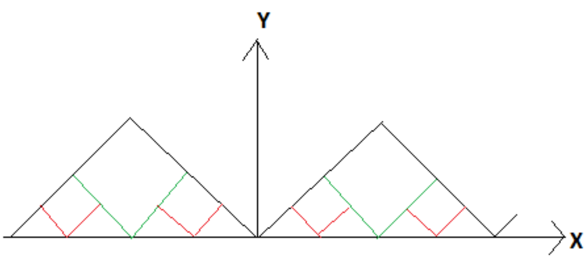
Производные можно использовать для определения эластичностей функции.

Конечная эластичность: $\dfrac{\dfrac{f(x)-f(x^0)}{f(x^0)}\cdot 100\%}{\dfrac{x-x^0}{x^0}\cdot 100\%}=\mathrm{E}_x^{f(x)}$

Предельная эластичность: $f'(x^0)\cdot\dfrac{x^0}{f(x^0)}=\mathrm{E}_x^{f(x)}$

Вопрос №26. Взаимосвязь между дифференцируемой и непрерывной функцией. Пример Ван-дер-Вардена.

<u>Теорема (о непрерывности и существовании конечной производной):</u>



Пусть $f(x)\in D^{(1)}(x^0)$. Тогда $f(x)\in C^{(0)}(x^0)$.

Заметим, что обратная теорема неверна. Пример привёл Ван-дер-

Варден:

Будем делить сегменты функции $f(x)=|x|$ бесконечно много раз. В итоге получим непрерывную функцию, которая в каждой точке недифференцируема.

Аналитически для функции $f(x)=|x|$ можем записать:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$$

Если предел слева не равен пределу справа, значит, предела нет. А следовательно – нет и производной (ни конечной, ни бесконечной).

Вопрос №27. Теорема о производной суммы и произведения конечного числа функций. Теорема о производной частного функций.

Теорема (о производной суммы, произведения и частного функций):

Пусть $f_1(x),\ f_2(x)\in D^{(1)}(x^0)$.

Тогда $\left(f_1(x)+f_2(x)\right),\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right),\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\in D^{(1)}(x^0)$, причём

$$\left(f_1(x)+f_2(x)\right)'=f_1'(x)+f_2'(x)$$
$$\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)'=f_1'(x)\cdot f_2'(x)$$
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1'(x)\cdot f_2(x)-f_1(x)\cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}$$

(для частного $f_2(x)$ не равно нулю). Теорема распространяется на конечное число функций, однако обратная теорема неверна.

Вопрос №28. Теорема о производной сложной функции.

Теорема (о производной сложной функции):

Пусть $g(x) \in D^{(1)}(x^0), g(x^0) = U^0,\ f(U) \in D^{(1)}(U^0)$.

Тогда $f(g(x)) \in D^{(1)}(x^0)$

Вопрос №29. Теорема о производной обратной функции.

Теорема (о производной обратной функции):

Пусть

1) $f(x) \in C^{(0)}(a;b)$

2) $f(x) \uparrow\uparrow (a;b), x^0 \in (a;b)$

3) $f(x) \in D^{(1)}(x^0)$

4) $f'(x^0) \neq 0$

Тогда в точке $y^0 = f(x^0)$ существует $g'(y^0)$, причём $g'(y^0) = \dfrac{1}{f'(x^0)}$.

Заметим, что условий (1) и (2) достаточно, однако условия (3) и (4) обеспечивают существования производной в точке x^0.

Вопрос № 30. Нахождение производных элементарных функций по определению.

Найдём по определению производную $f(x) = \sin x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2x+\Delta x}{2} = \cos x$$

Найдём по определению производную $f(x)=\ln x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

Вопрос №31. Точка локального максимума (сильного, слабого). Локальный максимум (сильный, слабый). Сравнение с глобальным максимумом.

Пусть $y=f(x), x\in M_f, \hat{x}\in M_f$ - точка локального максимума (слабого) $f(x)$ на M_f, если:

$$\exists\delta>0:\forall x\in\{\mathrm{M}_f\cap U_2(\delta;\hat{x})\}\Rightarrow f(\hat{x})\geq f(x)$$

Здесь $f(\hat{x})$ - слабый локальный максимум функции $f(x)$.

Пусть $y=f(x), x\in M_f, \hat{x}\in M_f$ - точка локального максимума (сильного) $f(x)$ на M_f, если

$$\exists\delta>0:\forall x\in\{M_f\cap\tilde{U}_2(\delta;\hat{x})\}\Rightarrow f(\hat{x})>f(x)$$

Здесь $f(\hat{x})$ - сильный локальный максимум функции $f(x)$.

Заметим, что точка глобального максимума всегда является точкой локального максимума, а обратное утверждение неверно.

Вопрос №32. Точка локального минимума (сильного, слабого). Локальный минимум (сильный, слабый). Сравнение с глобальным минимумом.

Пусть $y=f(x), x\in M_f, \breve{x}\in M_f$ - точка локального минимума (слабого) $f(x)$ на M_f, если

$$\exists\delta>0:\forall x\in\{M_f\cap U_2(\delta;\breve{x})\}\Rightarrow f(\breve{x})\leq f(x)$$

Здесь $f(\breve{x})$ - слабый локальный минимум функции $f(x)$.

Пусть $y = f(x), x \in M_f, \breve{x} \in M_f$ - точка локального минимума (сильного) $f(x)$ на M_f, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \left\{M_f \cap \tilde{U}_2(\delta; \breve{x})\right\} \Rightarrow f(\breve{x}) < f(x)$$

Здесь $f(\breve{x})$ - сильный локальный минимум функции $f(x)$.

Заметим, что точка глобального минимума всегда является точкой локального минимума, а обратное утверждение неверно.

Вопрос №33. Теорема Ферма или необходимое условие локального экстремума (доказательство).

Теорема Ферма: Пусть дана $f(x), x \in M_f \in E_1, x^0 \in M_f \cap M'_f$.

Также пусть x^0 – точка локального экстремума $f(x)$, причём $f(x) \in D^{(1)}(x^0)$. Тогда $f'(x^0) = 0$.

Необходимость: Для того, чтобы при данных условиях x^0 являлась точкой локального экстремума $f(x)$ необходимо, чтобы $f'(x^0) = 0$.

Достаточность: Для того, чтобы при данных условиях $f'(x^0) = 0$ достаточно, чтобы x^0 являлась точкой локального экстремума $f(x)$.

Заметим, что условие не является достаточным. Пример – $f(x) = x^3$. Здесь производная в точке $x = 0$ равна нулю, однако экстремума в точке $x = 0$ нет.

Доказательство: рассмотрим два случая:

$$\begin{cases} x > x^0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0} \le 0 \\ x < x^0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0} \ge 0 \end{cases}$$

По условию, функция дифференцируема в точке x^0, тогда:

$$\lim_{x\to x^0+0}\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}=\lim_{x\to x^0-0}\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}=f'(x^0)=0,$$ ч.т.д.

Вопрос №34. Теорема Ролля (доказательство).

Теорема Ролля:

Пусть
$$\begin{aligned}&f(x)\in C^{(0)}[a;b]\\&f(x)\in D^{(1)}(a;b).\\&f(a)=f(b)\end{aligned}$$

Тогда $\exists\xi\in(a;b):\ f'(\xi)=0$

Доказательство: по теореме Вейерштрасса функция имеет на $[a;b]$ точку k, которая является точкой глобального максимума (минимума). А значит, по теореме Ферма, $f'(k)=0\Rightarrow\xi=k$, ч.т.д.

Отметим, что все условия очень важны. Если не будет выполняться хотя бы одно, теорема Вейерштрасса или теорема Ферма не будет выполняться.

Вопрос №35. Теорема Коши о среднем значении (доказательство).

Теорема Коши:

Пусть

1) $\left.\begin{matrix}f(x)\\g(x)\end{matrix}\right\}\in C^{(0)}[a;b]$

2) $\left.\begin{matrix}f(x)\\g(x)\end{matrix}\right\}\in D^{(1)}(a;b)$.

3) $\forall x\in(a;b)\Rightarrow g'(x)\neq 0$

Тогда $\exists\xi\in(a;b):\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

<u>Необходимость:</u> Для того, чтобы условия 1), 2), 3) выполнялись, необходимо, чтобы $\exists \xi \in (a;b): \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

<u>Достаточность</u>: Для того, чтобы $\exists \xi \in (a;b): \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, достаточно, чтобы выполнялись условия 1), 2), 3).

<u>Доказательство:</u>

1) Пусть $f(x)$ постоянна, значит, она непрерывна на данном отрезке и имеет конечную производную. В качестве точки ξ можно взять любую точку из отрезка.

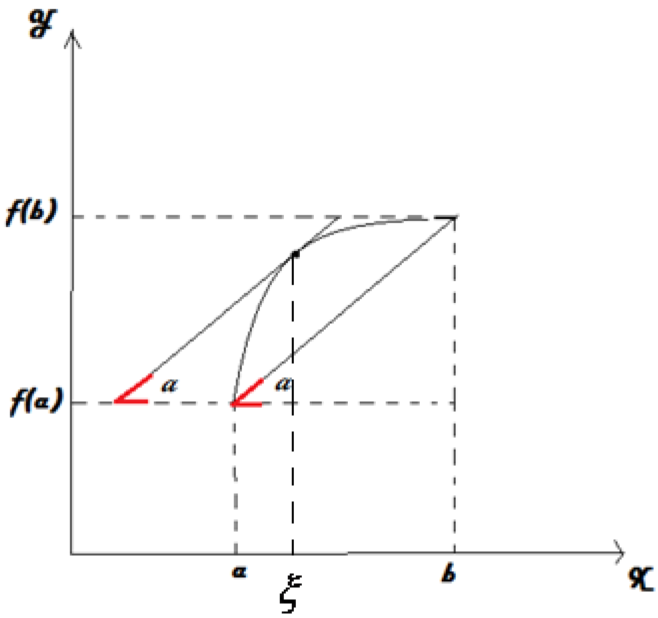
2) Если $f(x)$ непостоянна, построим вспомогательную функцию:

$$h(x) = [f(b)-f(a)]\cdot g(x) - [g(b)-g(a)]\cdot f(x).$$

Запишем $h(a)$ и $h(b)$:

$$h(a) = [f(b)-f(a)]\cdot g(a) - [g(b)-g(a)]\cdot f(a) =$$
$$= f(b)\cdot g(a) - g(b)\cdot f(a)$$

$$h(b) = [f(b)-f(a)]\cdot g(b) - [g(b)-g(a)]\cdot f(b) =$$
$$= f(b)\cdot g(a) - g(b)\cdot f(a)$$



$$h(a) = h(b)$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на данном интервале и имеют конечные производные, то $h(x)$ также непрерывна и имеет конечную производную на (a,b). По теореме Ролля, для которой выполнены все условия, можем утверждать, что $\exists \xi \in (a;b): h'(\xi) = 0$. То есть:

$$h(\xi)=[f(b)-f(a)]\cdot g'(\xi)-[g(b)-g(a)]\cdot f'(\xi)=0$$
$$[f(b)-f(a)]\cdot g'(\xi)=[g(b)-g(a)]\cdot f'(\xi)$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\text{, ч.т.д.}$$

Вопрос №36. Теорема Лагранжа о среднем значении (доказательство). Геометрическая интерпритация.

Теорема Лагранжа:

Пусть $\begin{matrix} 1)\, f(x)\in C^{(0)}[a;b] \\ 2)\, f(x)\in D^{(1)}(a;b) \end{matrix}$.

Тогда $\exists\xi\in(a;b):\ f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

Необходимость: Для того, чтобы выполнялись 1) и 2), необходимо, чтобы $\exists\xi\in(a;b):\ f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

Достаточность: Для того, чтобы $\exists\xi\in(a;b):\ f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$, достаточно, чтобы выполнялись условия 1) и 2).

Доказательство: введём вспомогательную функцию, которая является также непрерывной и дифференцируемой на $(a;b)$:

$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$. Рассмотрим $F(b)$ и $F(a)$:

$$F(a)=f(a)-0=f(a)$$
$$F(b)=f(b)-f(b)+f(a)=f(a)$$
$$F(a)=F(b)$$

Применим теорему Ролля, для которой выполнены все условия: $\exists\xi\in(a;b):F'(\xi)=0$. Тогда:

$$F(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a),\text{ч.т.д.}$$

Вопрос №37. Правило Лопиталя (доказательство для случая неопределённости вида [0/0]).

Правило Лопиталя:

Положим, что

$$1)\left.\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}\right\} \in C^{(0)}[a;b]$$

$$2)\left.\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}\right\} \in D^{(1)}(a;b)$$

$$3)\ \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0$$

$$4)\forall x \in (a;b) \Rightarrow g'(x) \neq 0$$

. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Доказательство (для случая неопределённости вида [0/0]): доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a до непрерывной функции:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), a < x \leq b \\ 0, x = a \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), a < x \leq b \\ 0, x = a \end{cases}$$

Видно, что обе полученные функции непрерывны на $[a;b]$. В промежутке $(a;b)$ производные данных функций и доопределённых соответственно совпадают, а также производная $g(x)$ не обращается в ноль. Получаем, что все условия теоремы Коши выполнены. Применим эту теорему. Пусть $t < b$ и $t \in (a;b)$. Тогда:

$$\exists \xi \in (a;t): \frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(t) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(\xi)}{\tilde{g}'(\xi)}$$

Отметим, что $t \neq a \Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}(t) = f(t) \\ \tilde{g}(t) = g(t) \end{cases}, \begin{cases} \tilde{f}'(\xi) = f'(\xi) \\ \tilde{g}'(\xi) = g'(\xi) \end{cases}$.

$\tilde{f}(a)=\tilde{g}(a)=0$

Подставим в равенство из теоремы Коши:

$$\frac{\tilde{f}(t)-0}{\tilde{g}(t)-0}=\frac{\tilde{f}'(\xi)}{\tilde{g}'(\xi)}\Rightarrow\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Получаем:

$$\lim_{t\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{t\to a+0}\frac{f(t)}{g(t)}, \text{ ч.т.д.}$$

Вопрос № 38. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

Многочлен Тейлора степени k с центром в точке x^0:

$$P_k=f(x^0)+\frac{f'(x^0)}{1!}(x-x^0)+\frac{f''(x^0)}{2!}(x-x^0)^2+$$
$$+\frac{f'''(x^0)}{3!}(x-x^0)^3+\ldots+\frac{f^{(k)}(x^0)}{k!}(x-x^0)^k$$

Если $x^0=0$, получаем многочлен Маклорена:

$$P_k=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Формула Тейлора:

$f(x)=r_k(x^0;x)+P_k(x^0;x)$, где $r_k(x^0;x)$ – остаточный член.

Остаточный член в форме Пеано:

$$r_k(x^0;x)=o\left((x-x^0)^k\right)$$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$r_k(x^0;x)=\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x^0)^{k+1}$$

Вопрос №39. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции в промежутке. Достаточное условие локального экстремума функции одной переменной.

Теорема (о достаточном условии строгого возрастания функции):

Пусть $\begin{cases} f(x), x\in(a;b)\subseteq E_1 \\ f(x)\in D^{(1)}(a;b) \end{cases}.$

Тогда $\forall x\in(a;b):\ f'(x)>0 \Rightarrow\ f(x)\uparrow\uparrow(a;b)$

Теорема (о достаточном условии строгого убывания функции):

Пусть $\begin{cases} f(x), x\in(a;b)\subseteq E_1 \\ f(x)\in D^{(1)}(a;b) \end{cases}.$

Тогда $\forall x\in(a;b):\ f'(x)<0 \Rightarrow\ f(x)\downarrow\downarrow(a;b)$

Теорема (о достаточном условии локального максимума функции):

Положим, что $\begin{cases} f(x), x\in(a;b)\subseteq E_1 \\ f(x)\in D^{(1)}(a;b) \\ x^0\in(a;b),\ f'(x^0)=0 \end{cases}.$

Пусть $\exists\delta>0:\begin{cases} \forall x\in(x^0-\delta;x^0)\Rightarrow\ f'(x)>0 \\ \forall x\in(x^0;x^0+\delta)\Rightarrow\ f'(x)<0 \end{cases}.$

Тогда $\forall x\in(x^0-\delta;x^0+\delta)\setminus\{x^0\}\Rightarrow f(x^0)>f(x)$. x^0 – точка сильного локального максимума.

<u>Теорема (о достаточном условии локального минимума функции):</u>

Положим, что $\begin{cases} f(x), x \in (a;b) \subseteq E_1 \\ f(x) \in D^{(1)}(a;b) \\ x^0 \in (a;b),\ f'(x^0) = 0 \end{cases}$.

Пусть $\exists \delta > 0 : \begin{cases} \forall x \in (x^0 - \delta; x^0) \Rightarrow f'(x) < 0 \\ \forall x \in (x^0; x^0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases}$.

Тогда $\forall x \in (x^0 - \delta; x^0 + \delta) \setminus \{x^0\} \Rightarrow f(x^0) < f(x)$. x^0 – точка сильного локального минимума.