А. К. ЗВОНКИН

МАЛЫШИ и МАТЕМАТИКА

Домашний кружок для дошкольников

РИСУНКИ
М. Ю. Панова

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО ЦЕНТРА
НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
ИНСТИТУТА
ОТКРЫТОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКВА — 2006

УДК 372.3/.4:51(072)
ББК 74.102
З42

Звонкин А. К.

З42 Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников / Рис. М. Ю. Панова. — М.: МЦНМО, МИОО, 2006. — 240 с.: ил.
ISBN 5-94057-224-3.

Автор этой книги — профессиональный математик — рассказывает о своём опыте занятий математикой с дошкольниками. Жанр книги смешанный: дневниковые записи перемежаются рассуждениями о математике или о психологии, наблюдения за детьми и за их реакцией на происходящее служат источником для новых задач, а те в свою очередь позволяют углубить и развить как бы намеченные пунктиром идеи.

Книга будет интересна родителям дошкольников (а также их бабушкам и дедушкам), воспитателям детских садов, учителям начальных классов, и вообще всем тем, кого интересует процесс развития детского интеллекта.

УДК 372.3/.4:51(072)
ББК 74.102

Александр Калманович Звонкин.

Малыши и математика.
Домашний кружок для дошкольников.

Руководитель издательского проекта *В. О. Бугаенко.*
Редактор *Н. Б. Бугаенко.*
Художественный редактор *П. М. Юрьев.*

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.

Издательство Московского института открытого образования.
125167, Москва, Авиационный пер., 6.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
119099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-94057-224-3

Оглавление

Несколько предварительных замечаний

Родительский дневник

Среди многочисленных окололитературных жанров существует и такой: родительский дневник. Дети растут, с ними много всякого происходит, а родители всё это аккуратно заносят в тетрадочку. Потом, через много лет, эти тетрадочки оказываются просто-таки захватывающим чтением. Особенно для самих родителей. Ещё бы — ведь это про своих собственных детей, да ещё в таком умилительном возрасте. И, опосредованно, о своей молодости.

Часто ли вам, уважаемый читатель, приходилось разглядывать фотографии маленьких детей — не своих, а чужих? Приходят гости, вытаскивают стопку фотографий, и начинается... Вы уже на втором десятке с трудом подавляете зевоту, а они готовы длить это действо до бесконечности. Всё, что касается их детей или внуков, кажется им неотразимо интересным; а вас преследует только одна мысль: ну до чего же все младенцы похожи друг на друга!

Вот и я сейчас, как говорится, «представляя эту книгу на суд читателя», испытываю весьма смешанные чувства. Я хотел бы, но никак не могу войти в положение стороннего и объективного наблюдателя. Алла Ярхо, моя жена, вообще говоря, является очень строгим и придирчивым критиком. Но каждый раз, беря в руки этот текст, она его в очередной раз перечитывает — и не может оторваться. Вся столь привычная нам ирония куда-то отступает и вытесняется совсем другими эмоциями.

Эта книжка — про наших детей. У нас их двое — сын Дима и дочь Женя. Об их детских годах здесь и рассказывается; ну, и, разумеется, об их друзьях тоже — ведь не жили же они в колбе. Хотя невозможно отрицать, что мы были гораздо более внимательными и наблюдательными, когда дело касалось именно наших детей, а не чужих.

Перед автором возникает суровый вопрос: что интересного найдёт для себя в этой книге посторонний читатель? Почему она должна быть интересна не только нашей семье, но и чужим людям?

По идее ответ таков: эта книга — не «просто дневник», а *дневник математического кружка*. Когда Диме исполнилось 3 года и 10 месяцев, я собрал четверых ребят примерно того же возраста, что и он, или чуть постарше, его приятелей по двору, и начал вести с ними математический кружок. Вот об этом довольно необычном опыте здесь и рассказано. Если угодно, эту книжку можно воспринимать и как своего рода *задачник по математике для дошкольников*. С той особенностью, что, кроме самих задач, здесь рассказывается ещё и о том, как дети на эти задачи реагировали, что понимали, что нет, какие у нас с ними возникали трудности и недоразумения.

Пожалуй, если бы какой-нибудь автор написал сборник задач по самой обыкновенной геометрии или алгебре, но при этом ещё превратил бы каждую задачу в живую историю о том, как он и его ученики с этой задачей «сражались» — что ж, такая книга вполне могла бы меня как читателя заинтересовать. С малышами же это всё несравненно интереснее. Весь процесс развития мышления, все движения интеллекта здесь гораздо виднее, гораздо ярче. Начиная кружок, я не мог предвидеть, до чего это дело окажется увлекательным, попросту захватывающим. В результате так вышло, что в течение многих лет мой круг чтения в большой степени складывался из книг по педагогике и психологии — это сначала, а потом пошло дальше, вширь: лингвистика, психиатрия, поведение животных, генетика поведения... Я открыл для себя новый мир, я стал богаче и надеюсь, что умнее, и всё это благодаря моим детям. Хотя, казалось бы, ещё Грибоедов заметил: «Но чтоб иметь детей, кому ума недоставало?».

А дошкольная математика в её чисто математическом аспекте, между прочим, намного проще школьной — она доступна любому читателю, а не одним лишь специалистам. Это очень сильно расширяет потенциальную аудиторию книги.

В общем, главное сделано: я сам себя сумел убедить, что книжка эта интересна не мне одному. Теперь я могу с чистой совестью рекомендовать её читателю. (Признáюсь однако без лукавства, что многие друзья, читавшие первую, ещё рукописную версию дневника, уже давно призывали меня издать его в виде книги. Множество ксерокопий разошлось сначала по Москве, а потом и по всему миру. Этот интерес не угасает уже в течение двадцати лет, и это для меня ещё один аргумент в пользу данного предприятия.)

Зачем вести кружок? Зачем нужен дневник?

Кружок, как и любая другая форма систематических занятий, — это способ самодисциплины. В принципе, казалось бы, можно заниматься с детьми и без кружка. Задавать время от времени какие-то вопросы, задачи, что-то обсуждать. Но в реальной жизни так не получается, и весь проект очень скоро превращается в утопию. Вчера было некогда, сегодня нет настроения или устал... И вообще — почему непременно сейчас, сию минуту? Успеется, время ещё есть. Как-нибудь на днях...

И в итоге ничего не происходит.

Если же вы знаете, что завтра в одиннадцать утра к вам приведут четверых малышей, и вам нужно будет их развлекать хотя бы полчаса, вот тогда ситуация в корне меняется. Хотите вы того или не хотите, но вам придётся сесть в укромный уголок и начать что-то придумывать. Не получается придумать самому — значит лезть в какие-нибудь книжки за идеями. А когда настойчиво над чем-то думаешь, рано или поздно в голову приходят совсем новые идеи, которые вообще не появились бы, если бы не давление обстоятельств.

Или, допустим, вы породили новую идею, но она может потребовать «материальной подготовки»: нужно что-то вы́резать, нарисовать, склеить... Чтобы подвигнуть себя на такой «труд ради семьи», нужно иметь более жёсткие и более конкретные стимулы, чем просто залетевшая в голову мысль о возможной забавной задаче.

Дети, между прочим, тоже больше любят, когда их деятельность сопряжена с неким ритуалом. Если взрослые начнут ни с того ни с сего отвлекать детей от игры и приставать к ним с какими-то задачами, это вызовет скорее лёгкое раздражение и желание поскорей отделаться от этой неуместной навязчивости. И совсем другое дело — раз в неделю в определённое время собираться всем вместе, чтобы заниматься чем-то серьёзным.

Таков вкратце ответ на первый вопрос: зачем вести кружок?

Что касается дневника, то никакого дневника я поначалу не вёл, да и вообще особо серьёзного значения своим занятиям не придавал. Читатель увидит, что дневник начинается только с 21-го занятия. Первые «20 недель» — это вовсе не пять месяцев, как можно было бы подумать, а все десять: за это время были и летние каникулы, и разные другие пропуски. И вообще не надо думать, что если мы решили заниматься регулярно раз в неделю, то так уж всегда прямо и следовали принятому решению.

А дальше произошло вот что. Примерно через полгода после начала занятий несколько моих друзей попросили меня рассказать, чем и как мы занимаемся. Я радостно открыл рот... — но вместо потока задач и идей, который должен был бы из меня излиться, вдруг возникла неловкая пауза. Оказалось, что я всё забыл! Ну, не совсем всё, конечно, но близко к тому. Что я прекрасно помнил — так это то общее чувство энтузиазма и наполненности детской энергетикой, которое постоянно сопровождало меня на наших занятиях. А вот его конкретное наполнение фактами где-то заблудилось среди извилин. Что-то подобное рассказывают об инвалидах, потерявших ногу: чувство, что нога здесь, сохранилось, а самой ноги нет.

Такого подвоха от собственной памяти я не ожидал; я был смущён и расстроен. После этого разговора, записав вкратце то, что ещё хоть как-то удержалось в голове, я решил впредь вести нечто вроде конспекта. Пусть у меня будет хотя бы список задач, а на их основе вспомнится и остальное. Интересно, что я уже тогда, в тот момент подумал про «остальное»; видимо, я уже интуитивно чувствовал недостаточность самой идеи «списка задач».

Очень скоро я совершил своё первое «теоретическое открытие» в области педагогики. Я обнаружил (понял, почувствовал?), что записывать сами по себе задачи дело не очень осмысленное. То, что по-настоящему интересно, — это вовсе не условия задач и не их решения, а тот процесс, тот путь, который ведёт от одного к другому. Вы легко можете себе представить, что математические задачи, которые можно давать дошкольнику, сами по себе достаточно тривиальны (нетривиальным является только процесс их придумывания). С другой стороны, путь от задачи к решению вполне может занять несколько лет. Да-да, несколько лет, не удивляйтесь: вы ещё увидите тому массу примеров. В течение всего этого времени интеллект ребёнка вовсе не спит. Он бурлит, он кипит, он «носится, как угорелый» вокруг всего, что попадает в поле его внимания, в том числе и вокруг моих задач. Наш диалог на эту тему — это-то и есть самое интересное!

Таким вот образом мало-помалу мой «список задач» стал обрастать всё бо́льшим и бо́льшим количеством комментариев, историй, анекдотов, стал включать порой темы не только математические, там появились какие-то общие рассуждения и «теории», и так постепенно образовался этот дневник.

А потом наступил следующий этап: между кружком и дневником возникла *обратная связь*. Когда записываешь то, что видел и о чём думал, сами собой возникают новые мысли, возможные повороты сюжета, рождаются новые задачи и темы занятий. Осмысление становится глубже. Даже наблюдательность — и та заостряется, что ли. Порой вспоминаешь что-то произошедшее на кружке, на что в суматохе не обратил внимания, а потом бы и вообще забыл, если бы вовремя не записал. Вот такой в конечном итоге получился симбиоз, когда уже одно трудно себе представить без другого.

И, наконец, последний штрих. Прошло время, дети выросли — и прочли мой дневник. Оказалось, что они многое хорошо помнят, и их восприятие событий далеко не всегда совпадает с моим (а иногда и является в точности ему противоположным). По моей просьбе они добавили к тексту свои комментарии. Так появилось некое дополнительное измерение, делающее весь проект более диалогичным; как выразился один знакомый, возникает стереоскопический эффект.

Нужно ли редактировать дневники?

Я считаю, что безусловно да, нужно.

Старинные авторы говорили: «Эти листы никогда тиснению преданы не будут». То есть, мол, никогда не будут напечатаны. Чаще всего лукавили: рассчитывали на то, что взволнованные и благодарные потомки найдут их труд, придут в восторг от их искренности и откровенности (ведь писано-то только для себя!) — и опубликуют, и наступит вечная слава. Поймать такого автора бывает проще простого. Он постоянно поясняет сам себе то, что, казалось бы, и без того прекрасно знает. В таких ремарках нуждается читатель, но никак не сам автор.

Если же дневник и в самом деле пишется для себя, а потом читается кем-то другим, могут возникнуть чудовищные искажения. Представьте себе, скажем, такую ситуацию. Есть человек, которого я очень сильно уважаю; так сильно, что это граничит где-то даже с преклонением. Однако я всё же не слепой, и для меня не являются секретом некоторые его маленькие, а то и не такие уж маленькие недостатки и смешные черты характера. В дневнике «для себя» я могу вдоволь поиронизировать, поиздеваться над этим человеком; могу даже при случае излить своё раздражение. При этом мне вовсе не нужно напоминать самому себе про моё к нему истинное отношение. («Но вы не подумайте, я его вообще-то очень уважаю...» — Кто «вы»?) Если этот текст потом попадёт к постороннему читателю, картина окажется весьма далёкой от реальности: о моём уважении читатель ничего не узнает, останутся одни насмешки, одна язвительность.

Или возьмём другой пример, более к нам близкий. Вот я пишу здесь о детях. Вроде бы так, да не совсем. На самом деле я пишу всего лишь об одном аспекте их жизни — об их взаимоотношениях с математикой. А ребёнок к этому ну никак не сводится; по существу я описываю в среднем полчаса из двух недель его жизни. У него есть и другие интересы, и другие проблемы, и другие таланты. Читая эту книгу, даже я сам склонен об этом забывать, а уж что говорить о читателе, который этих детей никогда в глаза не видел! (Я ещё вернусь к этой теме на стр. 195—199, но в отношении одной лишь Жени.) И это ещё не говоря о том, что все эти дети уже давно выросли и им сейчас по 25—30 лет. Скоро уже их собственные дети будут читать о своих папах и мамах: «Когда папа был маленький...» То, что когда-то ещё могло хоть как-то претендовать на документальность, с течением времени всё более и более приобретает черты художественного вымысла; это будто написано о каких-то других людях.

Не могу сказать, что этот мой дневник был таким уж однозначно интимным документом. Это скорее *технический* документ. Я его и в самом деле писал для себя, но никогда не имел в виду держать его в секрете и охотно показывал всем, кто им интересовался. Но и этот технический характер тоже создаёт свои проблемы. Ну, не буду же я в самом деле сам себе объяснять, что такое ханойская башня или задача про волка, козу и капусту! И ещё — в оригинале имелись повторения, непонятные места, записи, нуждавшиеся в расшифровке... (Впрочем, некоторые повторения я оставил; особенно те, где из одних и тех же посылок делаются совершенно разные выводы. Так оно «аутентичнее».)

Одним словом, есть масса соображений, иногда этических, иногда технических, по которым мой материал нуждался в самом серьёзном редактировании. Вот почему я всегда уклонялся от многочисленных предложений опубликовать свой дневник «так как есть».

Ну, а почему же я его тогда так долго не редактировал? Зачем тянул столько лет?

Ну, чего тут объяснять? Жизнь есть жизнь. То одно, то другое (как говорил один персонаж Стругацких, объясняя, почему он не стал писателем).

И вообще, пора уже перестать ходить вокруг да около и перейти к делу.

Размышления неофита о дошкольной математике

Когда она начинается? Такие сценки каждый из вас наблюдал не раз. Мама прячется за штору, потом с улыбкой выглядывает и говорит: «Ку-ку!». И снова прячется. А совсем ещё крошечный малыш при каждом её появлении хлопает в ладоши и радостно визжит. Оба совершенно счастливы. Обоим, конечно же, и в голову не приходит, что они занимаются математикой.

Я написал эту фразу не для того, чтобы шокировать читателя или подцепить его на удочку притянутого за уши парадокса. Я это всерьёз. Если почитать труды психологов, можно узнать, что в возрасте до полутора лет основная интеллектуальная задача, которая стоит перед ребёнком, заключается в том, чтобы открыть закон постоянства объектов. То есть, что вещи не исчезают, когда мы перестаём их видеть, а остаются существовать там же, где были, — существовать без нас. Оказывается, такой важный объект, как мама, исчезнув за портьерой, всё же продолжает быть где-то здесь, и вскоре появляется из-за той же портьеры.

Ребёнок растёт, и его осмысление мира растёт вместе с ним. Вот микроскопического размера девочка играет в захватывающую игру: она подбирает по одному разбросанные на полу кубики и даёт их папе, каждый раз при этом торжественно возглашая: «На!». Папа берёт кубик — и она заливисто хохочет. Она совсем недавно усвоила слово «на» и использует его при каждой возможности. Неожиданно её не совсем ещё ловкие ручки захватывают сразу два кубика. Несколько мгновений она размышляет о том, как поступить; потом — эврика! — протягивает кубики папе и восклицает: «На-на!». Так и хочется тут перефразировать Пушкина: *следовать за мыслями малого человека есть наука самая занимательная*.

К двум годам очень многое уже усвоено. Вот мальчик двух с небольшим лет будит утром отца:

— Папа, папа, ты спишь?

— Да не́т, не сплю, — отвечает папа, протирая глаза. — Я на кухне, чай пью.

Сын крайне удивлён: это противоречит всем ранее выученным урокам. На всякий случай он всё же бежит на кухню проверить. Возвращается он оттуда триумфатором:

— Нет, ты не на кухне! Ты во́т, во́т ты где!

В следующий раз его тем же способом провести не удастся. Хочется всё же отметить вот этот момент самостоятельного исследования, когда он на всякий случай сбегал на кухню посмотреть. Мы все без всяких объяснений чувствуем, что это очень важное детское качество, и что хорошо было бы подольше его сохранить.

Считаем по-японски. Пройдёт ещё немного времени, и ребёнка начнут уже совершенно сознательно «обучать математике». На практике это обычно означает, что его будут учить считать. Спору нет, умение считать — вещь важная и полезная. Но нам, взрослым, бывает очень трудно понять, что́ это умение означает в реальности.

Давайте встанем на место ребёнка и попробуем сами научиться арифметике... но только по-японски! Итак, вот вам первые десять чисел: *и́ти, ни, сан, си, го, ро́ку, си́ти, ха́ти, ку, дзю*. Первое задание — выучить эту последовательность наизусть. Вы увидите, что это не так-то просто. Когда это наконец удастся, можете приступать ко второму заданию: попробуйте научиться считать также и в обратном порядке, от *дзю* до *ити*. Если и это уже удаётся, давайте начнём вычислять. Сколько будет к *року* прибавить *сан*? А от *сити* отнять *го*? А *хати* поделить на *си*? А теперь давайте решим задачу. Мама купила на базаре *ку* яблок и дала по *ни* яблок каждому из *си* детей; сколько яблок у неё осталось? Очень трудное, но обязательное условие — не переводить на русский, даже в уме. После недолгого периода тренировок такой перевод может возникать в мозгу непроизвольно, против нашей воли, а то и вообще незаметно для нас самих.

Тот интеллектуальный подвиг, который совершают дети в начальной школе, я оценил позднее, оказавшись во Франции. Прожив здесь уже более десяти лет, я всё ещё испытываю проблемы с французскими числительными. Всё потому, что французы считают не так, как мы, в интервале от 70 до 99. После шестидесяти девяти у них идёт шестьдесят-десять (т. е. 70), шестьдесят-одиннадцать (71), шестьдесят-двенадцать (72) и т. д.; наконец, в конце десятка — шестьдесят-девятнадцать (79); после этого вдруг возникает четыре-двадцать (80), четыре-двадцать-один (81), четыре-двадцать-два (82), ... , четыре-двадцать-девять (89), — и снова, как ранее, четыре-двадцать-десять (90), четыре-двадцать-одиннадцать (91), четыре-двадцать-двенадцать (92), . . . , четыре-двадцать-девятнадцать (99); после этого, наконец, сто. Когда мне очень быстро говорят телефонный номер, или называют годы рождения и смерти какого-нибудь знаменитого человека, ухватить со слуха нужное число удаётся не всегда. Хорошо ещё, что мне не приходится всё это складывать-вычитать.

(Отсюда, кстати, и происходит этот часто упоминаемый в педагогической литературе смешной ответ французского младшеклассника: на вопрос «Сколько будет двадцать умножить на четыре?» он ответил: «Будет четыре-двадцать, потому что умножение коммутативно».)

Но вот вы наконец научились беглому счёту в пределах *дзю*. Сколько времени у вас на это ушло? Неделя? Месяц? Теперь вы отдаёте себе отчёт в том, что проблема здесь не в одной только механической памяти: если бы дело было только в ней, то вся работа заняла бы полчаса. Но если не в памяти, то в чём же? Можете ли вы вычленить из вашего опыта содержательные, чисто математические трудности, которые присутствуют в счёте, но остаются где-то за кадром — невидимые, незаметные? Не так-то легко, не правда ли?

И, может быть, это к лучшему. Иначе энтузиасты раннего обучения тут же бросились бы изо всех сил объяснять малышу то, чего он пока ещё понять не может, желая поскорее втащить его за шиворот на следующую ступеньку лестницы.

А ведь он мог бы сам...

Детсадовская геометрия. Вторая тема, традиционно фигурирующая в дошкольной математике — это геометрия. Считается, что детям нужно сообщить некоторый (довольно скромный) набор сведений, касающихся геометрических фигур: что такое треугольник, квадрат, круг, угол, прямая, отрезок, а также научить их простейшим приёмам измерения. Но давайте вдумаемся: если ребёнок легко отличает вилку от ложки, почему же ему трудно отличить квадрат от треугольника? Да ему и не трудно вовсе! В чём он действительно испытывает трудность, так это в уяснении логических взаимоотношений между понятиями, а также тех действий, которые можно с фигурами совершать.

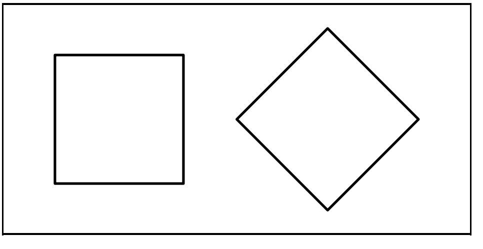


Рис. 1. Слева нарисован квадрат. А справа? Дети часто думают, что нет: повёрнутый квадрат теряет статус квадрата и превращается просто в четырёхугольник.

Многие первоклассники, например, считают, что если нарисовать квадрат косо, то он перестанет быть квадратом и станет просто четырёхугольником (рис. 1). А вопрос о том, чего вообще больше — квадратов или четырёхугольников, требует уже вовсе недюжинной логики.

Если взглянуть на дело с этой точки зрения, то треугольники с квадратами тотчас же теряют право первородства: задачи про вилки и ложки ничуть не менее математичны, если в них есть над чем подумать. Скажем то же самое несколько иначе. Школьная математика занимается «числами и фигурами», и это правильно. Но малышу об этих объектах мы можем сообщить очень мало содержательного. Из этого могло бы следовать, что никакого математического развития в раннем возрасте вообще не происходит. Могло бы, но не следует. Материала хоть отбавляй, нужно только правильно (и осторожно) подойти к делу.

Итак, правильный подход: каков он? На этот счёт сколько людей, столько мнений. Приведу некоторые из них (в слегка утрированном виде, но только лишь для того, чтобы яснее выразить мысль).

Мнения

1. «*В современную эпоху неизмеримо выросли требования к математической подготовке выпускников детского сада*». — Ох, до чего же скулы сводит от этих «возросших требований». Бежать, бежать от них подальше!

2. «*А вы знаете, что это, вообще-то, очень опасно—чрезмерно загружать мозг ребёнка сложными вещами. Интегралы там, и прочее*». — Господи! Да кто же вам говорил об интегралах-то?

3. «*Вы представляете, у него малые дети изучают теорию вероятностей! Взрослые люди, с высшим образованием, ничего в этом понять не могут, а малыши прекрасно разбираются. Я всегда говорил, что возможности нашего мозга ещё не изведаны, и особенно — в раннем детстве*». — Дорогой энтузиаст, вы ошибаетесь: никакую теорию вероятностей мы не изучаем, хотя и наблюдаем некоторые вероятностные явления. (Впрочем, тем же занимается и человек, гадающий на автобусной остановке, какой автобус придёт первым.) Ни за какие границы самых обычных возможностей человеческого мозга мы не выходим, а неизведанные возможности лучше оставим фантастам.

4. «*В раннем возрасте у детей обычно бывает превосходная память и способность к восприятию нового. К тому же в этом возрасте дети склонны во всём слушаться взрослых. Поэтому в этот период нужно вложить им в голову как можно больше информации. Позже, когда их взгляд на мир станет более критичным и они уже не захотят заниматься тем, в чём не видят смысла, им нужно давать больше времени на размышления, а также делать их учёбу более мотивированной*». — Эту точку зрения я вычитал в одной интернетской статье. Автор концепции — профессор, специалист по нейрофизиологии. Поскольку я не называю его имени, я позволю себе сказать без околичностей, что я об этом думаю: этот бред сивой кобылы не заслуживает комментария.

5. «*Не понимаю, зачем забивать детям голову такой ерундой! Пусть у ребёнка будет нормальное детство*». — Уважаемый оппонент, вы подняли не один, а сразу два вопроса: насчёт ерунды и насчёт нормального детства. Что касается ерунды, то тут я спорить не буду; это, в конце концов, дело индивидуального вкуса. Я занимался с детьми тем, что люблю сам, и именно этот аспект наших занятий кажется мне очень важным.

Когда появились мои статьи в журнале, я неожиданно для себя самого оказался в совершенно не свойственной мне роли давателя советов. Разные папы и мамы писали мне письма. Наиболее чётко обрисовала ситуацию одна мама: «Я с детства терпеть не могла математику. Но я знаю, что это очень важно для умственного развития ребёнка. Посоветуйте мне, как мне заниматься математикой с моим сыном». К счастью, на этот раз я знал, что ответить. Я написал примерно следующее: ни в коем случае не занимайтесь с сыном математикой, если вы её не любите. Занимайтесь только тем, что вам самой доставляет удовольствие; только в этом случае ваши занятия станут радостью для вас обоих. Это может быть что угодно. Например, если вы любите печь пироги, пеките их вместе с сыном... Вот только боюсь, не обиделась ли на меня эта мама, не сочла ли, что я считаю, будто математика — это не её ума дело.

А вот насчёт «нормального детства» — тут я буду спорить. Представьте себе такую сценку. Мы сидим на берегу реки и наблюдаем за одиночной осой, которая роет норку в плотном прибрежном песке. Она закончит работу, потом принесёт туда достаточное количество еды для своего потомства, например, парализованных ею пауков, отложит в них своё яичко и закопает. Известный биолог, специалист по поведению животных Николас Тинберген показал, что оса ориентируется на местности по окружающим предметам. Можно положить, скажем, детский сандалик с одной стороны от гнезда, ракушку с другой, а когда оса улетит, передвинуть их на метр в сторону. Через пару минут оса возвращается и — точно по предсказанию Тинбергена — садится не около гнезда, а в метре от него, между сандаликом и ракушкой. Опыт вызывает большой энтузиазм не только у наших детей, но и у тех, кто случайно оказался рядом с нами на пляже. (Интересная деталь, между прочим: ни у кого из них не появилось ни малейшего побуждения эту осу прихлопнуть.) Вот я вас и спрашиваю: входит ли это занятие в ваше представление о нормальном детстве? Ведь именно за эти опыты Тинберген в своё время получил Нобелевскую премию по биологии. Так что и на эту тему тоже можно было бы в романтическом захлёбе написать бог знает что — про вундеркиндов, ставящих нобелевские эксперименты.

Если я чему-то и учил детей, так это тому, чтобы воспринимать окружающий мир с интересом. На всю жизнь запомнил я одну фразу, сказанную мне как-то моим другом, замечательным математиком и педагогом Андреем Леоновичем Toомом. Привожу её здесь не как комплимент самому себе, а как прекрасную формулировку того идеала, к которому следует стремиться. Андрей сказал:

Ты их учишь не математике,
а образу жизни.

Краткая история наших занятий

По случайным обстоятельствам в каких-то записях сохранилась дата нашего самого первого занятия: 23 марта 1980 года. Занятия с мальчиками, хоть и не очень регулярно, продолжались четыре года. За это время подросла Женя, и начался второй кружок — с ней и с её подружками. Он продолжался два года. Было ещё несколько разрозненных попыток вести кружки с другими детьми, но все они быстро заканчивались; ведь надо всё же учитывать, что всё это делалось помимо основной работы (которую я предпочёл бы называть службой). Несколько раз я даже выступал в странной роли проезжего мэтра, дающего мастер-класс.

Однако в некоторый момент я решился пойти в школу! Сначала это был кружок в первом классе, где учился Дима; потом было ещё несколько затей подобного рода, и даже — совершенно отчаянный шаг, как головой в омут — в рамках одного педагогического эксперимента я целый месяц проработал рядовым учителем первого класса в одной из московских школ. До этого я был уверенным в себе интеллектуалом, всегда готовым критиковать школу и учителей и давать им мудрые советы. Этот жестокий, но чрезвычайно полезный эксперимент над самим собой заставил меня многое изменить в своих воззрениях.

Тут я, однако, хронологически забежал вперёд.

Важным этапом истории явилось то, что друг нашей семьи, известный психолингвист Ревекка Марковна Фрумкина, чей домашний семинар я с некоторого времени стал посещать, прочитав дневник, привела меня в редакцию журнала «Знание—Сила», где вскоре появились две мои статьи о кружке (№ 8 за 1985 год и № 2 за 1986 год). Была потом и третья, но она как-то «не прозвучала». А эти две неожиданно стали весьма популярными. Замечательный детский поэт и педагог Вадим Александрович Левин даже сказал мне как-то, что мои статьи — это, мол, классика педагогической литературы. Дальнейшая их судьба такова: через некоторое время они были переведены на английский язык в журнале The Journal of Mathematical Behavior; потом появились в Интернете, кажется, на четырёх разных сайтах; потом были перепечатаны в газете «Дошкольное образование» (май и июль 2000 года), на этот раз с комментариями В. А. Левина; потом вошли в его же книгу «Уроки для родителей» (М.: Фолио, 2001); наконец, совсем недавно, в 2005 году, издательский дом «Первое сентября» выпустил брошюру под названием «Домашняя школа для дошкольников», содержащую тот же текст, но, к сожалению, без фамилии Левина. (То же самое печальное явление имеет место и в некоторых интернетских публикациях. Таким образом, в частности, некоторые комплименты — чтобы не сказать дифирамбы — Левина в мой адрес оказываются приписанными мне самому. С этим трудно что-нибудь поделать: например, о выходе брошюры в «Первом сентября» ни меня, ни Левина даже не известили.)

А между тем начиналась перестройка. Наш близкий друг Степан Пачиков организовал в Москве детский компьютерный клуб; компьютеры купил и подарил клубу Гарри Каспаров. В то время (1986 год) это было едва ли не единственное место в Союзе, где школьники могли заниматься на компьютерах. Естественно, что мне поручили там занятия с самыми маленькими. Далее были летние компьютерные лагеря в Переславле-Залесском и зимний лагерь в Звенигороде. Был ещё один компьютерный клуб «Зодиак». Всего уже и не перечислишь. Я был нарасхват и везде естественным образом воспринимался как специалист по малышам. Меня втянуло в орбиту так называемого «Временного научного коллектива Школа-1», который должен был готовить реформу всей школьной системы; формальным его руководителем был академик Велихов, фактическим лидером — Алексей Семёнов. Из деятельности того времени хочу отдельно отметить написанный нами учебник «Алгоритмика» для 5—7 классов (авторы А. К. Звонкин, А. Г. Кулаков, С. К. Ландо, А. Л. Семёнов, А. Х. Шень; после нескольких промежуточных ротапринтных версий книжка была издана в издательстве «Дрофа» в 1996 году; впоследствии несколько раз переиздавалась). Кое-какие темы, впервые появившиеся на кружке, были в слегка усложнённом виде использованы в этом учебнике. Очень забавно мне было потом узнать, что этот курс использовался также для обучения младшекурсников в одном американском университете.

* * *

Здесь, однако, жизнь разворачивает перед нами ещё один сюжет, связанный с кружком лишь косвенно. В 1989 году я сменил место работы. До этого в течение 13 лет я проработал во «Всесоюзном научно-исследовательском и проектно-конструкторском институте комплексной автоматизации нефтяной и газовой промышленности». Знающим людям не обязательно раскрывать смысл этого «недавнего ретро»: третьеразрядный прикладной институт, с вахтёрами и поездками в колхоз; сердечные и доброжелательные отношения с товарищами по работе — соседями по судьбе; при этом невыносимо скучная и бессмысленная работа (сейчас те же самые люди делают нечто вполне осмысленное и полезное, но уже не в этом институте). Службу свою я ненавидел, но никаких шансов найти другую не было. И вот я вдруг оказался в «Научном совете по комплексной проблеме „Кибернетика“ Академии наук СССР», в команде, занимающейся подготовкой и внедрением курсов информатики в школьное образование, а также, под предлогом информатики, всевозможными иными педагогическими новациями. Получилось у нас, наверное, «как всегда», но в тот период все мы были полны энтузиазма и увлечены своей работой, порой до полного истощения физических сил. Если посмотреть на это дело не с точки зрения большой истории, а с точки зрения моей собственной биографии, то совершенно очевидно одно: не было бы кружка — не было бы и моей новой работы.

Помимо этого я, как и прежде, продолжал заниматься математикой. Как бы это объяснить попонятнее? Была научная работа в области педагогики, но была и научная работа в области самой математики. Но и в этой деятельности я так же резко и кардинально сменил специализацию. Толкнуло меня к этому среди всего прочего и то, что в уже упоминавшемся детском компьютерном лагере в Переславле-Залесском я нашёл двух коллег, увлечённых той же, новой для всех нас, темой: Сергея Ландо и Георгия Шабата. Мы начали работать вместе — и продолжаем до сих пор: наша совместная с С. Ландо монография вышла в издательстве Springer-Verlag совсем недавно, в 2004 году.

В 1990 году я впервые поехал во Францию. Думаю, что в прежнем институте меня бы туда просто не отпустили; но в Совете по кибернетике обстановка была совсем иная. В тот период я ещё очень плохо знал специалистов в моей новой области математики. Эта поездка помогла мне сориентироваться: оказалось, что самые близкие мне по интересам люди работают в Бордо. Я туда съездил; потом ещё раз; потом меня пригласили на год; и в конце концов получилось так, что я там и остался. Вот так всё странно обернулось: тот факт, что я сегодня профессор университета в Бордо, в очень большой степени связан с тем, что когда-то много лет назад я стал вести математический кружок для малышей.

(Раз уж я ударился в мемуаристику, позволю себе рассказать тут ещё одну историю. Мне для этого придётся немножко похвастаться, но без этого и истории не выйдет. Я, значит, был приглашённым профессором в городе Бордо, сроком на год. И вот мне поручили прочесть четыре лекции о «теории сложности» на курсах повышения квалификации учителей. Проблема была в том, что аудиторию составляли учителя математики, физики, биологии, истории и литературы! Что можно сделать в такой смешанной компании? В предыдущие годы слушатели регулярно жаловались, мол, зачем им вставили в программу эту дурацкую тему? Никто этот курс брать не хотел. Как тут быть?.. Эврика! Я сообразил, что можно использовать несколько сюжетов из упоминавшегося выше учебника алгоритмики. Они достаточно просты, чтобы быть понятными всем, но при этом даже и для учителей математики будут новыми; при желании их можно также развивать и усложнять. Успех был сногсшибательный. Мне передали, что слушатели «очарованы» и только спрашивают, почему всего четыре лекции. Договорились, что я прочту ещё две. Было очень лестно, но это только полдела. Вторые полдела состоят в том, что этот эпизод оказал несомненное влияние на выбор комиссии, которая решала, кого из пары десятков кандидатов принять на постоянную должность профессора.)

Благодарности

Читатели у меня умные; они и сами догадываются, с чего я начну этот раздел. Я начну его с благодарности детям. Когда я был молодой, мои родители часто приставали ко мне с нравоучениями: «Вот будут у тебя свои дети — тогда поймёшь». Я злился: ну что я пойму, что я пойму? Подумаешь, дети! Вон у всех вокруг есть дети — и что с того? Не такая уж это большая редкость. Я тогда не мог представить себе, до какой степени меняется всё мировоззрение, всё мироощущение человека, когда у него появляются дети. Готов поверить, что существуют люди с лучшим воображением, чем у меня, и они способны это понять даже не имея собственных детей; наверное, для них соответствующий переворот в сознании протекает менее бурно. Но в моей «персональной вселенной» Большой взрыв произошёл именно таким образом — благодаря детям. Вот за это им и спасибо.

Я глубоко благодарен всем детям-участникам нашего кружка. Трудно передать, сколь многому я у них научился. Но им я хочу сказать ещё одну вещь. Я честно и изо всех сил старался делить своё внимание поровну между всеми, но боюсь, что это не всегда получалось. Очень хочется надеяться, что никто не остался на меня в обиде. Ну, а если какие-то упрёки в мой адрес у них в душе сохранились, я могу им сказать только одно: «Вот будут у вас свои дети — тогда поймёте».

Я благодарен моей жене Алле Ярхо. Во-первых, за то, что у нас появились дети — она в этом деле была активной участницей. Во-вторых, идея организовать кружок принадлежит именно ей. Вообще, наш кружок был почти в той же степени её, что и мой, это будет вполне очевидно из дальнейшего. Я благодарен ей за моральную поддержку тогда, а также и за моральное давление во все последующие годы — чтобы я наконец взялся и довёл этот дневник до конца. И, разумеется, в процессе его подготовки она была и корректором, и стилистическим редактором, и советчиком, и просто заинтересованным читателем.

Ревекка Марковна Фрумкина «вывела меня в свет»: благодаря ей наше сугубо семейное предприятие получило широкую известность. Рита Марковна (так зовут её друзья) является крёстной матерью множества интересных проектов. Перед вами один из них. Хочу добавить, что обсуждения с ней позволили мне «причесать» многие из моих мыслей.

Алексей Львович Семёнов был моим формальным начальником в Совете по кибернетике, но по существу он был для меня ориентиром во многих вопросах, да и просто «старшим товарищем» (хоть он и моложе меня). Его убеждённость в том, что эта работа представляет более широкий интерес, частично передалась и мне.

Александр Ханевич Шень поначалу был одним из заинтересованных читателей моих рукописных тетрадок и уговаривал меня поскорее всё это опубликовать. Со временем, однако, не выдержав темпов моей работы, он организовал группу школьников и студентов, которые подготовили на компьютере первую версию книги. Особенно хочется отметить в этой связи огромную работу, которую проделал Владимир Луговкин. После этого мне уже некуда было деваться — пришлось всерьёз заняться редактированием. И снова незаменимый Саша установил на мой французский компьютер русифицированную версию LaTeX'а. Без Саши Шеня эта работа затянулась бы, наверное, ещё на годы.

Список тех, кому я благодарен, не только не окончен, но даже ещё по существу и не начат. Но если я буду продолжать в том же стиле, то читатель всё равно пропустит эту часть, не читая.

Поэтому скажу коротко: я глубоко признателен всем тем, с кем я когда-либо «долго ли, коротко ли» обсуждал эту работу, тем, кто своей заинтересованностью укрепляли мой дух. Дорогие друзья: спасибо вам!

* * *

В Москве, в Большом Власьевском переулке (недалеко от Арбата), расположено одно совершенно замечательное и уже успевшее прогреметь на весь мир учреждение: «Московский центр непрерывного математического образования» (МЦНМО). Слово «непрерывный» здесь означает — рассчитанный на все возрасты. В состав центра входит Независимый Московский университет и аспирантура при нём, но здесь же организуются всевозможные математические олимпиады и другие внеклассные занятия для школьников старших и средних классов. Чем не идея — расширить спектр возрастов, охватив также и дошкольников? Я счастлив и горд тем, что моя книга выходит в издательстве МЦНМО. К тому же в таких местах неизбежно встречаешь старых друзей. Один из них, Вадим Олегович Бугаенко, хоть это и не входит в его прямые обязанности, организовал работу по подготовке этой книги к печати. Он сумел собрать вокруг себя превосходную команду. Я благодарен всем, но в первую очередь Михаилу Панову, который, в частности, сделал заново все рисунки. (Специалисты оценят его виртуозное умение творить художественные иллюстрации с помощью программы METAPOST, задуманной изначально лишь как инструмент для создания графических изображений в научных статьях.)

С работой центра можно ознакомиться на сайте http://www.mccme.ru/

Может быть, именно там вы эту книгу и читаете. На этом же сайте можно узнать, где и как её можно купить.

Два предупреждения

Я должен сделать два важных заявления.

Первое: *не все приведённые в этой книге задачи придуманы мной*. Я использовал самые разнообразные источники — от статей по психологии до сборников по популярной математике или просто рассказов друзей. Иногда я сохранял условия, часто же менял их как мне вздумается, порой до полной неузнаваемости, и иногда прямо на ходу, на самом занятии. Многие из моих источников давно забыты; другие потерялись в переездах, и я сейчас не могу назвать точную ссылку. Наверняка есть и задачи, про которые я уже и сам давно забыл, что это не я являюсь их автором. Чтобы отдать этот долг человечеству, я разрешаю всем желающим безвозмездно пользоваться всем здесь изложенным и обязуюсь ни на кого не подавать в суд за плагиат. Я буду только рад (и даже горд), если придуманные мной сюжеты войдут в фонд педагогического фольклора.

И второе предупреждение: *представленные здесь рассказы не имеют стенографической точности*. Они были записаны по памяти; к тому же не всегда возможно разобрать, что говорят несколько детей одновременно. Я уверен, что многое пропустил мимо ушей и что по крайней мере кое-что понял превратно. Впрочем, думаю, что всё это и так очевидно.

1

Первое занятие и мысли вокруг

Как это происходило

В приведённом здесь рассказе использованы материалы моей статьи «Малыши и математика, непохожая на математику» (журнал «Знание—Сила», № 8 за 1985 год).

Участников нашего кружка четверо: мой сын Дима и трое его друзей — Женя, Петя и Андрюша. Дима — самый младший, ему 3 года и 10 месяцев; самый старший — Андрюша, ему скоро должно исполниться пять.

Мы рассаживаемся вокруг журнального столика. Я, конечно, волнуюсь: как я тут с ними со всеми управлюсь? Для начала говорю детям, что мы будем заниматься математикой, и для поддержания авторитета добавляю, что математика — это самая интересная в мире наука. Тут же получаю вопрос:

— А что такое наука?

Приходится объяснять:

— Наука — это когда много думают.

— А я думал, что фокусы будут, — несколько разочарованно произносит Андрюша. Его дома предупредили, что дядя Саша будет с ними сегодня заниматься, и будут фокусы.

— Фокусы тоже будут, — говорю я и, сворачивая вступление, перехожу к делу.

Вот первая задача. Я кладу на стол 8 пуговиц. Не дожидаясь моих указаний, мальчики вместе кидаются их считать. Видимо, несмотря на юный возраст, некоторое представление о том, что такое математика, у них уже есть: математика — это когда считают. Когда шум утих, я могу сформулировать собственно задачу:

— А теперь положите на стол столько же монет.

Теперь на столе оказывается ещё 8 монет. Мы кладём монеты и пуговицы в два одинаковых ряда, друг напротив друга.

— Чего больше, монет или пуговиц? — спрашиваю я.

Дети смотрят на меня несколько недоумённо; им не сразу удаётся сформулировать ответ:

— Никого не больше.

— Значит, поровну, — говорю я. — А теперь смотрите, что я сделаю.

И я раздвигаю ряд монет так, чтобы он стал длиннее.

— А теперь чего больше?

— Монет, монет больше! — хором кричат ребята.

Я предлагаю Пете сосчитать пуговицы. Хоть мы их уже считали четыре раза, Петя ничуть не удивляется моему заданию и подсчитывает количество пуговиц в пятый раз:

— Восемь.

Предлагаю Диме сосчитать монеты. Дима считает и говорит:

— Тоже восемь.

— Т о ж е восемь? — подчёркиваю я голосом. — Значит, их поровну?

— Нет, монет больше! — решительно заявляют мальчики.

По правде говоря, я заранее знал, что ответ будет именно таким. Эта задача — только одна из бесчисленных серий задач, которые давал в своих экспериментах детям-испытуемым великий швейцарский психолог Жан Пиаже (о «феноменах Пиаже» немного рассказывается в следующем разделе). В своих опытах он установил: маленькие дети не понимают того, что нам с вами кажется самоочевидным — если несколько предметов как-нибудь переставить или переместить, то их количество от этого не изменится. Итак, я знал заранее, что скажут дети. Знал, но почему-то не приготовил никакой разумной реакции. А как поступили бы вы, читатель? Что бы вы сказали детям?

К сожалению, самый распространённый приём, которым пользуются в такой ситуации почти все взрослые, состоит в том, чтобы начать детям изо всех сил что-то втолковывать. «Ну как же так! — с наигранным удивлением говорит взрослый. — Откуда же их могло стать больше? Ведь мы же никаких новых монет не добавляли! Ведь мы их только раздвинули — и всё. Ведь раньше же их было поровну — вы же сами говорили! Значит, их никак не могло стать больше. К о н е ч н о ж е (выделяем голосом), монет и пуговиц осталось поровну!»

Старания напрасны — такая педагогика никуда не ведёт. Точнее, ведёт в тупик. Во-первых, не надейтесь, что ваша логика в чём-нибудь убедит ребёнка. Логические структуры он усвоит ещё позже, чем закон сохранения количества предметов. Пока этого не произойдёт, логические рассуждения не покажутся ему убедительными. Убедительной является только интонация вашего голоса. А она покажет ребёнку лишь то, что он опять оказался не на высоте и что-то сделал не так. Дети сдаются не сразу, их здравый смысл не так-то легко сломить. Но если насесть как следует, можно добиться того, что они перестанут опираться на собственный ум и наблюдательность, а будут пытаться угадать, чего желает от них взрослый. Взрослые вообще предъявляют детям множество необъяснимых требований: почему-то нельзя рисовать на стене; почему-то надо идти ложиться спать, когда игра в самом разгаре; почему-то нельзя спрашивать: «А когда этот дядя уйдёт?». Вот и сейчас происходит что-то аналогичное: хотя я прекрасно вижу, что монет больше, чем пуговиц, но почему-то полагается отвечать, что их поровну. Отношение к математике как к некоему ритуалу, в котором нужно произносить определённые заклинания в определённом порядке, зарождается в школе и прекрасно доживает до университета, где его можно встретить даже у студентов-математиков.

Так что же всё-таки делать? Вообще не задавать подобных вопросов, что ли, если уж нельзя прокомментировать ответ?

Напротив, задавать вопросы как раз нужно. Очень полезно также обменяться мнениями: «А ты, Женя, как думаешь? А ты, Петя? А почему? А насколько монет стало больше?» Можно даже наравне с остальными высказать и свою точку зрения, но очень осторожно и ненавязчиво, снабдив всяческими оговорками типа «мне кажется» и «может быть». Иными словами, весь свой авторитет взрослого нужно употребить не на то, чтобы закрепить за этим авторитетом абсолютную власть единственно правильного суждения, а на то, чтобы убедить ребёнка в важности и ценности его собственных поисков и усилий. Но ещё интереснее натолкнуть его на противоречия в его собственной точке зрения.

— А сколько монет надо забрать, чтобы снова стало поровну?

— Две монеты надо забрать.

Забираем две монеты; считаем: пуговиц восемь, а монет шесть.

— А теперь чего больше?

— Теперь поровну.

Очень хорошо. Я снова раздвигаю монеты пошире и задаю тот же вопрос. Теперь уже оказывается, что шесть монет — это больше, чем восемь пуговиц.

— А почему их стало больше?

— Потому что вы их раздвинули.

Мы опять отбираем две монеты; потом ещё раз. Наконец, картинка становится такой, как показано на рис. 2.

В этот момент вдруг завязывается яростный спор. Одни мальчики по-прежнему считают, что монет больше, другие вдруг «увидели», что больше пуговиц. Пожалуй, самое время прерваться и перейти к другой задаче; пусть дальше думают сами.

Я был среди тех, кто говорил, что монет всё равно больше. В первый раз я просто согласился со всеми остальными, а потом просто говорил не думая. Все предыдущие разы так было правильно (т. е. папа с этим соглашался), поэтому у меня не было причины менять мнение и в последний раз. — Дима.

Все эти мысли и идеи пришли ко мне далеко не сразу, так что в своём рассказе я забежал вперёд — и в будущие свои размышления, и в будущие занятия. Эта задача ещё многократно возникала у нас в разных обличьях. Было у нас, например, две армии, которые никак не могли победить друг друга, потому что у них было поровну солдат. Тогда одна из них раздвинулась, солдат у неё стало больше, и она начала побеждать. Увидев это, вторая армия раздвинулась ещё шире и т. д. (Закончить историю можно в соответствии с собственной фантазией.) Ещё был Буратино, которого Лиса Алиса и Кот Базилио пытались обмануть, раздвигая пять золотых монет и утверждая, что их стало больше. Я научился не ждать лёгких побед. Всё равно раньше чем через два—три года дети не усвоят закон сохранения количества предметов, как бы вы их ни учили. Да самое главное, это вовсе и не нужно! Я уверен: от этих скороспелых знаний пользы ровно столько же, сколько от преждевременных родов. Всему своё время, и не следует опережать события, в том числе и в области воспитания интеллекта. (Признаю, что эта точка зрения высказана здесь в несколько демагогической форме. Но аргументы в её пользу — а их немало — будут обильно рассыпаны по дальнейшему тексту.) Однако, повторяю, все эти мысли были потом. А тогда, на первом занятии, какое-то интуитивное озарение удержало меня от «объяснений», и я просто перешёл к следующей задаче.

На столе шесть спичек. Складываю из них различные фигурки и прошу ребят по очереди сосчитать, сколько здесь спичек. Каждый раз их оказывается шесть штук... Нет, я слишком увлёкся схоластическими рассуждениями и стал писать как-то по-канцелярски. Давайте вернёмся в живую детскую аудиторию, давайте увидим, как это происходит в жизни.

Каждый новый результат подсчёта встречается настоящим взрывом восторга и хохота. Вот уже Андрюша и Женя кричат, что всегда получится шесть. Вот уже Дима довольно невежливо рвёт у меня из рук спички, чтобы самому сложить какую-то вычурную фигурку, а Петя, напротив, очень вежливо спрашивает, не могу ли я ему дать ещё спичек. Ещё чуть-чуть — и их веселье перерастёт в неуправляемое детское буйство. Надо их как-то удержать, и внимательно выслушать Андрюшу с Женей («Почему вы думаете, что всегда будет шесть?»), и к тому же не упускать новые повороты мысли: ведь тут как раз Дима сложил трёхмерную фигурку — колодец (рис. 3). Я привлекаю к ней всеобщее внимание. На этот раз даже Андрюша с Женей уже не так твёрдо уверены, что снова получится шесть. Считать спички очень трудно — колодец всё время разваливается. Мы его восстанавливаем, считаем снова, он опять разваливается... Наконец у Димы получается семь! Все в лёгком недоумении, но особенно сильного удивления никто не проявляет: семь так семь, хоть и немного странновато. Ну что ж, я, наверное, повторяюсь — ну так и повторюсь, не суть

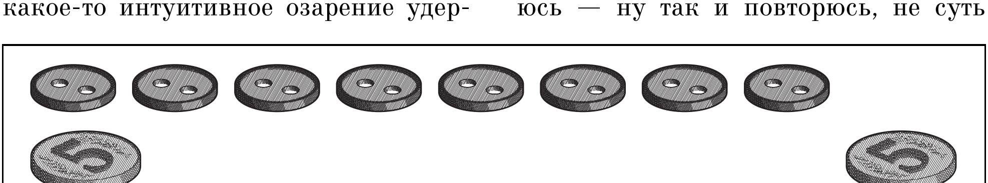


Рис. 2. В верхнем ряду лежат 8 пуговиц, в нижнем — 2 монеты. Чего больше, монет или пуговиц?

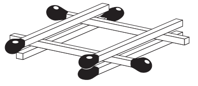


Рис. 3. «Колодец» из шести спичек.

важно: моя педагогическая задача состоит не в том, чтобы сообщать детям окончательно установленные истины, а в том, чтобы разбудить их любознательность. Самый замечательный результат, на который я хотел бы рассчитывать, о котором, можно сказать, мечтаю — это чтобы кто-нибудь из мальчиков через несколько дней (или месяцев) вдруг по собственной инициативе сам сложил спички колодцем и пересчитал их — просто потому что стало интересно, потому что захотелось узнать, как же обстоят дела на самом деле. Ведь это было бы маленькое самостоятельное исследование! Ну, а если этого не случится, то, будем надеяться, произойдёт в другой раз, с другой задачей. (В будущем я имел немало подтверждений, что так оно и бывало неоднократно.) Так или иначе, я ограничиваюсь лишь замечаниями типа «как интересно!» и «замечательно!» — в надежде, что эта ситуация покрепче застрянет у них в памяти.

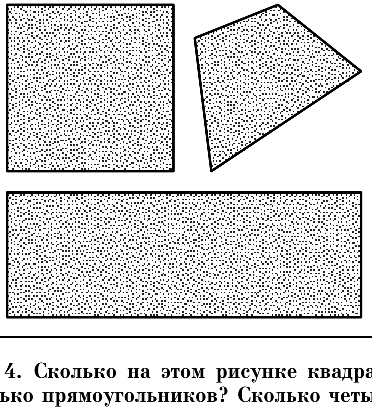


Рис. 4. Сколько на этом рисунке квадратов? Сколько прямоугольников? Сколько четырёхугольников? Даже взрослые часто ошибаются в ответах на эти вопросы.

Детская память — это совершенно поразительная вещь. Не могу удержаться, чтобы не вставить здесь одну историю из более позднего времени.

Одно из занятий: перед нами на столе три фигурки из картона (рис. 4). Мы детально и обстоятельно обсуждаем их свойства. Прежде всего, у всех фигурок — по четыре угла. Значит, каждую из них мы можем назвать четырёхугольником. Итого: у нас три четырёхугольника. При этом два из них отличаются тем, что у них все углы прямые. За это их называют прямоугольниками. Один из двух прямоугольников особый: у него все стороны одинакового размера. Его называют квадратом. У квадрата как бы три имени: его можно назвать и квадратом, и прямоугольником, и четырёхугольником — и всё будет правильно. Моя информация встречается не без сопротивления. Дети упорно стремятся мыслить в понятиях непересекающихся классов. А характер их объяснений внушает подозрение в том, что они ещё не о сознали по-настоящему великий закон «целое больше своей части». Десять минут назад они спорили о том, являются ли папы и дедушки мужчинами, а мужчины — людьми. А сейчас они никак не соглашаются называть квадрат прямоугольником: уж или одно, или другое. Я провожу настоящую агиткампанию за равноправие квадрата среди всех прямоугольников. Постепенно моя пропаганда начинает действовать. Мы ещё раз подводим итог:

— Сколько у нас квадратов?

— Один.

— А прямоугольников?

— Два.

— А четырёхугольников?

— Три.

Казалось бы, всё хорошо. И я задаю последний вопрос — я его уже упоминал во введении:

— А чего вообще на свете больше — квадратов или четырёхугольников?

— Квадратов! — дружно и без тени сомнения отвечают дети.

— Потому что их легче вырезать, — объясняет Дима.

— Потому что их много в домах, на крыше, на трубе, — объясняет Женя.

Такова завязка этой истории. А развязка произошла через полтора года, без всякой подготовки и даже без всякого внешнего повода. Летом на прогулке в лесу Дима неожиданно сказал мне:

— Папа, помнишь, ты давал нам задачу про квадраты и четырёхугольники — чего больше. Так мне кажется, мы тогда тебе неправильно ответили. На самом деле больше четырёхугольников.

И дальше довольно толково объяснил, почему. С тех пор я и исповедую принцип: вопросы важнее ответов.

...Психологи проводили и продолжают проводить множество экспериментов, пытаясь научить детей некоторым первоначальным математическим закономерностям. Например, делают так. Сначала группу ребят проверяют, понимают ли они такую простую вещь: если кусок пластилина помять, раскатать и вообще придать ему другую форму, то количество пластилина от этого не изменится. Тех, кто этого не понимает, делят на две части. Одну оставляют «свободной» — это так называемая контрольная группа. А другую начинают обучать закону сохранения количества вещества: показывают, объясняют, взвешивают, сравнивают. Недели через две опять проверяют участников обеих групп, смотрят, кто чему научился. Чаще всего в результате оказывается, что прогресс в обеих группах весьма незначительный и при этом совершенно одинаковый. Обычно психологи недоумевают: почему же дети, которых так старательно обучали, так ничему и не научились. Я, читая отчёты об этих экспериментах, заинтересовался противоположным явлением: почему дети, которых ничему не учили (контрольная группа), тоже чуть-чуть продвинулись вперёд. Моя гипотеза после нескольких лет занятий с малышами такова: это происходит потому, что им тоже задавали вопросы.

Однако вернёмся на наше занятие. Следующая задача — ещё одна вариация всё на ту же тему закона сохранения количества предметов. Те самые шесть спичек, которые ещё остались на столе после предыдущей задачи, раскладываются в рядок. Я прошу к каждой спичке приложить пуговицу (рис. 5).

Стандартный вопрос:

— Чего больше — спичек или пуговиц?

— Поровну.

— Значит, пуговиц столько же, сколько спичек, — резюмирую я.

Забираю все пуговицы в кулак и прошу сказать, сколько у меня в кулаке спрятано пуговиц. Характерно, что никто не делает ни малейшей попытки подсчитать спички. Да и зачем, собственно? Ведь спрашивают про пуговицы — значит, и считать нужно пуговицы. Дима как человек со мной на самой короткой ноге пытается разжать мой кулак, другие удивлённо спрашивают:

— Как же мы можем их сосчитать?

Я смеюсь:

— Сосчитать, конечно, нельзя — пуговицы спрятаны. Но попробуйте как-нибудь угадать.

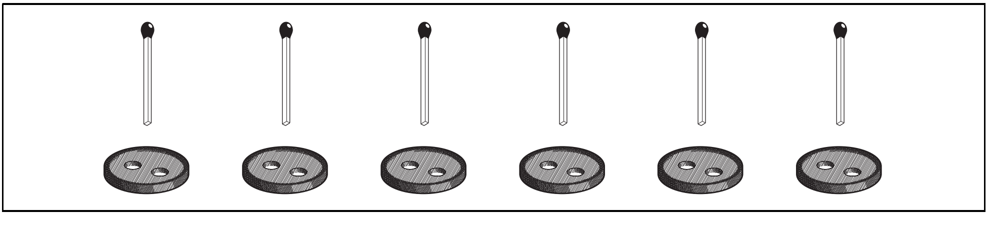


Рис. 5. Спичек и пуговиц поровну.

Тогда на меня обрушивается настоящий шквал отгадок, чаще всего ни на чём не основанных. Каждый кричит что-то своё; при этом один лишь Женя кричит правильный ответ. Я пытаюсь его выслушать, спросить, почему, но он ретируется. Жене вообще часто мешает робость. Пока все кричат хором, перебивая друг друга, он, пожалуй, чаще других кричит правильный ответ. Но стоит всех утихомирить и обратиться лично к нему, как он смущается и уходит в себя. С Андрюшей — другая проблема. Он мальчик очень целеустремлённый, и на наших занятиях ему явно не хватает мотивации. Когда я в следующий раз предложил ту же задачу в другой аранжировке — уже были не пуговицы со спичками, а солдаты с ружьями, потом они ушли, а ружья остались, и теперь разведчику нужно узнать, сколько было солдат — вот тогда он первым догадался, что можно сосчитать ружья. И ещё он любит игры, в которых кто-то должен выйти победителем. Но у меня не всегда хватает фантазии представить задачу в подходящей форме. Тем более что для остальных детей этот аспект безразличен. Зато Дима вообще не любит решать чужие задачи, а любит придумывать свои. С трудом я подобрал к нему ключик — стал говорить примерно так: «Придумай задачу, в которой было бы...» — и дальше излагаю своё условие. К тому же его решения часто отличаются какой-то странной вычурностью (особенно это будет видно в следующей задаче); его довольно трудно ввести в колею здравого смысла. И с Петей, конечно, свои сложности... Как же мне поспеть-то — одному на всех? Боже мой, у меня всего четыре ученика, а я не могу обеспечить им индивидуальный подход! Что же может сделать учитель, у которого сорок человек в классе? Учи́теля часто любят сравнивать с дирижёром. Я сам себе кажусь похожим скорее на жонглёра, у которого вот-вот всё рассыпется по арене. Так и сейчас: пока я пытаюсь беседовать с Женей — что да почему — Дима уже вытащил карточки для следующего задания («четвёртый — лишний») и спрашивает:

— Папа, а это что, следующая задача?

Остальные двое уже рвут у него карточки из рук и безжалостно мнут их при этом, не щадя вечернего родительского труда. Женя уже тоже косится в их сторону и слушает меня вполуха. Я разжимаю кулак, мы бегло проверяем, сколько пуговиц, и переходим к следующей задаче.

Правила игры «четвёртый — лишний» общеизвестны. Детям дают четыре карточки, на которых изображены, например, заяц, ёжик, белка и чемодан. Нужно сказать, какой из этих рисунков лишний. Забавно наблюдать, как дети почти всегда дают правильный ответ, хотя далеко не всегда могут его объяснить.

— Лишний — чемодан.

— Почему?

— Потому что он не заяц, не ёжик и не белка.

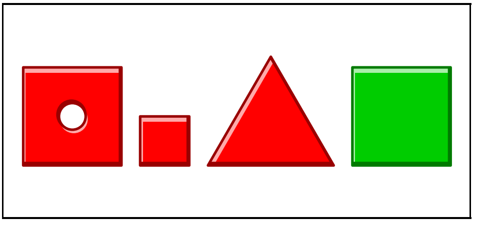


Рис. 6. Вместо того, чтобы искать, какой предмет здесь лишний, нужно по очереди самим «назначать» лишнего и потом объяснять, почему он лишний.

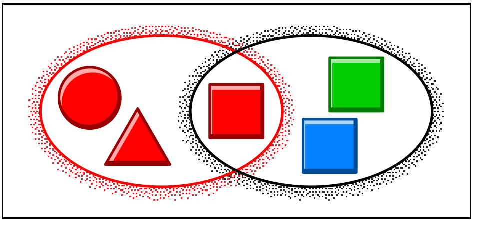


Рис. 7. Здесь изображены два множества по три предмета в каждом: одно состоит из трёх красных предметов, другое — из трёх квадратов. Красный квадрат является для них «общим»; математики говорят — «лежит *в пересечении*» этих множеств.

— Ах, вот как! А по-моему, лишний заяц. Потому что он не ёжик, не белка и не чемодан!

Мальчики смотрят на меня в недоумении и заявляют настойчиво:

— Нет, лишний чемодан!

Я пытаюсь узнать, нельзя ли все три нелишних предмета — зайца, ёжика и белку — назвать одним общим словом. Наконец, Петя, который по словарному запасу опережает остальных, первый находит нужное слово — «животные». И в дальнейшем он часто выручал нас в подобных ситуациях.

(А как-то раз меня пригласили провести занятие в группе незнакомых детей, тоже лет четырёх—пяти. Я выложил на стол свои любимые карточки с зайцем, ёжиком, белкой и чемоданом и спросил, кто здесь лишний. Дети смотрели на меня с выражением полной затравленности и ужаса во взоре. Наконец один из них набрался храбрости и выдавил: «Поровну...» Ага, понял я, с ними уже до меня как следует «позанимались».)

Между прочим, я даю также и задачи с неоднозначным ответом. Например: воробей, пчела, улитка и самолёт. Можно лишним считать самолёт (неживой), а можно улитку (не летает). На рис. 6 показан пример, когда каждый из предметов может быть объявлен лишним, так что суть задачи меняется. В таких задачах я сам по очереди назначал лишних, а мальчики должны были давать объяснения. Так я пытался внушить им эту важную для математики идею, что нужны не только и даже не столько правильные ответы, сколько правильные объяснения; или, на более научном языке, не только правильные утверждения, но и их доказательства.

Схема «четвёртый — лишний» и её разновидности очень удобны для того, чтобы учить детей угадывать закономерности (эта грань математического мышления полностью игнорируется школьной педагогикой). Иногда удобнее брать восемь картинок, которые должны разделиться по выделенным признакам на две равные группы; именно такой схемой пользовался М. М. Бонгард в своей классической книге «Проблемы узнавания». К сожалению, и читатель с этим легко согласится, восемь картинок — это вдвое больше, чем четыре. А где их взять-то? За редкими исключениями, картинки для нашего кружка рисовала Алла; я сам рисовать совсем не умею, а она в своё время окончила художественную спецшколу.

И уж совсем трудные логические задачи получаются с пересекающимися классами. Например, пять картинок нужно разбить на две равные группы, по три картинки в каждой; при этом одна из картинок общая — она принадлежит обеим группам. Вот, например: мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, пальто, шапка. Здесь три предмета из резины (мяч, шина, сапоги) и три предмета одежды (сапоги, пальто, шапка); общий элемент — сапоги. Отдельный вопрос: как чисто физически поделить пять картинок на две группы по три — не рвать же одну карточку пополам. Мы пользовались стандартным приёмом: двумя верёвочными кругами, в пересечении которых помещали общий предмет (на рис. 7 показан ещё один пример аналогичной ситуации).

Для Димы этот класс задач явно представлял собой проблему (или это сам Дима представлял собой проблему?).

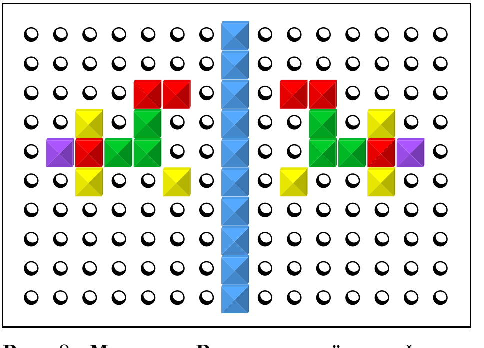


Рис. 8. Мозаика. Вертикальный ряд фишек посередине представляет собой «зеркало», или ось симметрии. Фигурку слева строит преподаватель; симметричную ей фигурку справа должен построить ученик.

— Это хоть и дядя, но похож на тётю, — говорил он про старика с бородой-лопатой и помещал его в общество женщин. Про автомобильную шину он долго доказывал нам всем, что это тоже одежда, так как её можно носить на поясе. Когда же с ним никто не согласился, он сказал:

— Всё равно это одежда, потому что её надевают на автомобиль.

Кто-нибудь скажет: вот, ребёнок умеет мыслить творчески, нестандартно. Насчёт «нестандартно» согласен, но вот творчески... Человек по-настоящему творческий умеет предложить неожиданное, нестандартное решение и при этом остаться в рамках задачи. Сложить шесть спичек колодцем — тут я согласен, это решение творческое. Счесть же бородатого старика тётей или автомобильную шину одеждой — нет. Очень часто у Димы присутствует первый компонент — нестандартность, а вот остаться в рамках задачи или хотя бы вблизи от них он пока не умеет. Надо как-то суметь, не подавив одно, развить другое. А как?

Наша следующая (и последняя на этот раз) задача — из области геометрии. Я извлекаю цветную детскую мозаику, купленную когда-то в магазине «Лейпциг» (увы, всего в одном экземпляре: в момент покупки мы ещё не помышляли о кружке). Мозаика представляет собой прямоугольное поле с отверстиями. В них вставляются одинаковые по форме фишечки пяти разных цветов (рис. 8). Цвет фишек очень яркий, насыщенный, приятный для глаз. Наша задача — про симметрию. Сначала я выкладываю ось — одноцветную вертикальную линию, проходящую посередине поля. Я называю эту линию «зеркалом»; в это зеркало сейчас будут смотреться разные фигурки. Я строю с одной стороны от оси разнообразные небольшие фигурки, а мальчики должны построить симметричные им фигурки с другой стороны. Я варьирую всё, что можно: цвет, размер, расположение фигур. На следующих занятиях будет меняться также и расположение оси: сначала она станет горизонтальной, потом пойдёт по диагонали. С помощью настоящего зеркала мы проверяем наши решения: оказывается ли за зеркалом то же самое, что мы видим в зеркале?

Мальчики справляются с задачей на удивление легко, почти не допускают ошибок. Не могу понять, почему эта тема (осевая симметрия) вызывает трудности в шестом классе! Мы впоследствии посвятили ей много занятий. Симметрия в самом деле очень богатая тема, и к тому же красивая. Мы рассматривали картинки с симметричными узорами из книг по популярной математике. Мы рисовали симметричные фигуры разноцветными фломастерами на клетчатой бумаге; делали симметричные кляксы, складывая лист бумаги пополам; вырезали новогодние снежинки; находили ошибки в симметричных рисунках, в которых были специально сделаны кое-где нарушения, отклонения от точной симметрии; среди восьми карточек находили четыре симметричные и четыре несимметричные фигуры; у одной фигуры находили все возможные оси симметрии, и т. д. Другие виды изометрий — центральная симметрия, поворот, параллельный перенос — оказываются для детей несколько более сложными, а вот осевая симметрия буквально идёт «на ура».

А мозаика вскоре стала моим любимейшим инструментом. Это не игра, а настоящий клад всевозможных задач по геометрии, комбинаторике, логике, угадыванию закономерностей. А однажды она мне преподала незабываемый урок на тему о том, «чтó для детей важнее». Дело было так. Мальчики с удовольствием ходили на занятия, а иногда даже бывало так, что в ответ на мои слова «урок окончен» просили позаниматься ещё. Я гордился собой — пока вдруг не заметил, что их просьбы продолжить занятие следуют только тогда, когда мы занимаемся с мозаикой. Я решил проверить свою догадку. Следующее занятие было без мозаики.

Так оно и есть: говорю «урок окончен» — дети спокойно встают и расходятся. Меня охватили глубочайшие сомнения. Мозаика в самом деле очень красива, нет ничего удивительного в том, что ребятам нравится с нею играть. А моя математика, думал я, здесь ни при чём; я протаскиваю её как обузу, как никому не нужный довесок, как нагрузку к интересной игрушке! На следующий раз я решил устроить решающий эксперимент. Мы опять занимаемся с мозаикой; опять мальчики не хотят заканчивать занятие; и тогда я говорю:

— Нет, давайте мы урок всё-таки закончим, а с мозаикой я вам разрешаю поиграть просто так.

В ответ следует единодушный вопль возмущения, и Петя резюмирует общую точку зрения в решительных словах:

— Э, не-ет! Мы хотим задачку!!

Вот так я понял, где лежит истина. Детям нужно полноценное интеллектуально-эстетическое удовольствие. Если одна из половин отсутствует, полноценность теряется, а с ней и ощущение праздника. Новогодняя ёлка без игрушек имеет в глазах детей так же мало притягательности, как игрушки без ёлки. Только когда они соединяются вместе, наступает праздник. Я надеюсь, что в будущем, через годы, когда мои ребята будут заниматься более абстрактной, «умственной» математикой, они будут получать от этого больше удовольствия, чем их сверстники. Ведь возникающие у них в уме абстрактные образы и понятия будут где-то на дне сознания эмоционально сливаться с «ёлкой», окрашиваться воспоминаниями о разноцветных задачах их детства.

Вот и сейчас — мы уже прошли два круга, т. е. каждый из ребят решил по две задачи на симметрию, пора бы уже кончать, но мальчики не унимаются, хотят ещё. Мне кажется, что они уже устали. И я нахожу неожиданный выход:

— Давайте теперь *вы* будете мне задавать задачи, а я буду их решать.

Дети в восторге! С новым пылом они строят фигурки, а я — им симметричные. Работаю старательно. Вдруг в голову приходит ещё одна идея: я начинаю нарочно делать ошибки. Петя первый это замечает; счастью детей нет конца. К ним как будто пришло второе дыхание. Теперь они с горящими глазами, не отрываясь, следят за моей рукой, встречая каждую новую ошибку воинственными дикарскими кличами.

Но пора и в самом деле закругляться. Я отодвигаю мозаику, благодарю всех и объявляю занятие оконченным.

— А когда же фокусы будут? — вдруг вспоминает Андрюша.

— Ну как же, Андрюша! Ведь ты сам и показывал фокусы! Пуговиц было не видно, они были спрятаны у меня в кулаке, а ты сумел их сосчитать.

Сумел, правда, не он, а Женя, но Андрюша, видимо, об этом позабыл, потому что выглядит вполне удовлетворённым. Мы встаём. Я смотрю на часы: неужели прошло всего 25 минут? Сейчас дети разойдутся, а я останусь приводить в порядок свои мысли, придумывать новые задачи, новые подходы, приёмы. И ещё — клеить, вырезать, раскрашивать. Одним словом, готовить то, что в педагогике зовётся скучным словом «дидактический материал». Ведь до следующего занятия — всего одна неделя.

Феномены Пиаже: реальность или обман зрения?

В этой книге я многократно возвращаюсь к так называемым феноменам Пиаже. Поэтому, думаю, надо сказать о них несколько вводных слов.

Великий швейцарский психолог Жан Пиаже (Jean Piaget) — безусловно одна из наиболее монументальных фигур в психологии XX века. За свою долгую жизнь (1896—1980) он написал около 50 книг и около 500 статей (точное их количество вряд ли знал даже он сам). В 1976 году отмечался весьма своеобразный юбилей: восьмидесятилетие со дня рождения Пиаже и семидесятилетие его научной деятельности. Именно так! Свою первую статью он опубликовал в возрасте 11 лет: он наблюдал в парке воробья-альбиноса и описал его в каком-то журнале.

В школьные годы Пиаже увлекается «малакологией» — наукой о моллюсках — и вскоре становится общепризнанным специалистом в этой области. Заочно, «по совокупности работ», ему предлагают весьма престижную должность смотрителя коллекции моллюсков в Женевском музее Натуральной истории. Мальчику приходится признаться, что он всего лишь школьник. К 20 годам он уже малаколог с мировым именем.

В этот момент он резко меняет направление своих занятий и переключается на детскую психологию. И уже к 30 годам становится признанным классиком детской психологии и автором пяти всемирно известных монографий. Дальше наступает весьма своеобразный этап. Эти пять монографий надолго заслонили дальнейшую деятельность Пиаже. При слове «Пиаже» у специалистов возникал своего рода автоматический рефлекс: «А-а, Пиаже, как же, как же, знаем! Знаменитые пять книг...». А между тем он продолжал двигаться вперёд, и притом с не меньшим напором и всё с той же легендарной продуктивностью. Впрочем, и миру вскоре становится не до детской психологии. Фашизм, война, потом послевоенное восстановление... А в тихой нейтральной Швейцарии Пиаже продолжает свою работу. Где-то, по-видимому, в 50-е годы происходит осознание реального масштаба его вклада в науку.

Некоторое количество трудов Пиаже переведено на русский язык. Например, имеется сборник: Жан Пиаже «Избранные психологические труды» (М.: Просвещение, 1969). В нём можно найти и абсолютно нечитаемую теоретическую работу «Психология интеллекта», и книгу, от которой трудно оторваться: «Генезис числа у ребёнка». Вообще, чтобы получить общее представление о его теории, лучше всего, по-моему, читать книгу Джона Флейвелла «Генетическая психология Жана Пиаже» (М.: Просвещение, 1967).

Характерно, что сам Пиаже считал себя не психологом, а *эпистемологом*, т. е. специалистом по теории познания. Эта наука призвана ответить на вопрос, каким образом мы можем вообще что-то *знать*. Если в поисках ответа мы хотим не просто переливать друг в друга пустые слова, а заниматься конкретными исследованиями, то у нас есть два пути: либо изучать историю познания — каким образом люди постепенно познавали мир; либо изучать, каким образом это происходит у маленьких детей. Пиаже пошёл по второму пути.

Из всех многочисленных грандиозных конструкций, теоретических построений и экспериментальных исследований Пиаже наиболее широкую известность приобрели так называемые *феномены Пиаже**. Я уже упоминал их выше. Маленький ребёнок не понимает, что если переложить несколько предметов (камешков, кубиков, ...) иначе, то их число при этом не изменится. Тем самым и само понятие числа остаётся для него недоступным, хотя он, быть может, и умеет «считать до ста». Потом ребёнок подрастает, и вместе с этим приходит осознание вышеуказанного закона сохранения. Но всё равно приходится ждать ещё года полтора—два, пока он не осознаёт аналогичный закон для непрерывных количеств: если раскатать шарик пластилина в колбаску, то количество пластилина останется тем же; если перелить воду из стакана в миску, то количество воды тоже не изменится. А также и многочислен-

* Вот (неполный) список других сюжетов, которые он изучал: логика, время, движение и скорость, пространство, геометрия, случайность, восприятие, рассуждения подростков, воображение, речь, нравственные суждения ребёнка, причинность, классификация и многое другое.

ные «смежные» закономерности — типа того, что если есть два одинаковых количества, и от одного из них забрали больше, а от другого меньше, то *там, где забрали больше, осталось меньше*. Во всё это трудно поверить, настолько указанные принципы кажутся нам самоочевидными.

В этом замечательном открытии самым поразительным мне представляется то, что для него не нужны были ни космические ракеты, ни синхрофазотроны, ни лазеры. Оно в буквальном смысле «вертелось у всех под ногами». Не обязательно было дожидаться XX века: Платону и Евклиду оно было так же доступно, как и нам. Но — не пришло в голову. Потребовался интерес к познавательной функции человека, правильная постановка вопроса, недюжинная наблюдательность, ну и, разумеется, обширный эксперимент. Интересно, однако, что феномены Пиаже встретили также и мощнейшее сопротивление учёного сообщества. До сих пор, по прошествии многих десятилетий, вы встретите людей, которые при их упоминании только рукой махнут: мол, глупости всё это. Ведь мы же задаём ребёнку вопрос посредством *слов*, не так ли? Мы спрашиваем, где *больше*, где *меньше*, где *поровну*. А кто и когда объяснял ему смысл этих слов, их, если угодно, семантику? Просто он их не так понимает, как мы, вот и всё. Лучше всего эту идею выразил один мой знакомый математический логик:

— Ведь ты же не дал им *определения* слова «больше». Вот они и понимают его по-своему. Они считают, что «больше» — это значит, что ряд длиннее.

Что тут можно возразить? В самом деле, определения не давал. А что же я должен был сказать? Что существует биекция между одним множеством и собственным подмножеством другого множества? Никаких вопросов это не снимает: откуда же знать, что если такая биекция нашлась один раз, то найдётся и в другой раз? Видимо, надо было доказать такую лемму... Я спорю, но сам чувствую, что вяло. Вот, мол, в опытах вместе с детьми взвешивали куски пластилина до и после раскатывания в колбаску... Ну и что, что взвешивали! Ребёнок же не знает, как устроены весы и что означают их показания.

Этот спор можно вести до бесконечности: выхода из заколдованного круга не существует. Как бы мы ни общались с ребёнком, в какой бы форме ни ставили ему вопрос, всегда будет существовать некое промежуточное звено, некоторый «носитель сигналов», будь то слова, весы или арифметический подсчёт. И всегда можно свалить всю вину на то, что этот «интерфейс», этот «протокол обмена» недостаточно формализован: мы толкуем его одним образом, а ребёнок другим. Можно, правда, спросить у наших оппонентов, почему в семь лет ребёнок уже правильно отвечает на все вопросы, хотя никаких определений ему по-прежнему никто не давал. Но в серьёзном научном споре такой приём — «а как вы тогда объясните, что...?» — недопустим. Критик не обязан что-либо доказывать или объяснять — эта обязанность целиком возлагается на автора теории. Разумеется, в той мере, в какой в психологии вообще возможны доказательства.

Не вдаваясь в философские глубины этого спора, хочу сообщить моё собственное мнение на этот счёт. После многих лет работы с детьми никакие доказательства мне больше не нужны. Я *знаю*, что Пиаже прав. Я наблюдал его феномены столько раз и в таких разных обстоятельствах, порой спровоцированных мною, порой совершенно спонтанных, что убеждать меня больше не надо. Помню, например, как собрались гости и не хватило одного стула. Дима — тогда трёхлетний — стал предлагать разные способы, как их можно было бы пересадить. И каждый раз оказывалось, что снова не хватает одного стула. Достаточно было видеть его озадаченную физиономию, чтобы признать: дело тут вовсе не в семантике слова «больше». (Но я бы, разумеется, не обратил на это внимания, если бы Пиаже не подсказал.)

Психологи потратили немало сил и изобретательности, пытаясь научить детей законам сохранения (или, с точки зрения наших оппонентов, объяснить им точный смысл задаваемых вопросов). Результат, как правило, был нулевой. (Об одном — весьма относительном — успехе я расскажу чуть ниже.) Но больше всего мне понравилась вот какая история. Из большой группы испытуемых всё же удалось выделить некоторое количество детей, которые, судя по всему, «всё поняли». По крайней мере, на все вопросы экзаменаторов они отвечали правильно: «Пластилина осталось столько же, потому что мы к нему ничего не прибавили и не убавили. Мы только изменили его форму, и всё». И тогда исследователи сделали ещё один шаг. Они попытались детей *разучить*. Ответит ребёнок правильно, взвесят они вместе со взрослым пластилиновую колбаску — ан нет: она стала легче! Это зловредный экспериментатор незаметно для ребёнка отщипнул от неё кусочек. И вот оказалось, что те дети, которые легко научились, так же легко и разучились. Они стали отвечать, что, мол, пластилина стало меньше, потому что мы раскатали шарик в колбаску. А вот тех детей, которые знали закон сохранения ещё до эксперимента, знали сами по себе, разучить почему-то не удавалось. В тех же обстоятельствах они говорили:

— Наверно кусочек упал на пол, а мы не заметили.

Ну, хорошо: если так трудно, а то и вовсе невозможно научить ребёнка понятию числа, то чего я, собственно, добиваюсь? В чём цель и смысл моих занятий? Я уже говорил об этом, и буду повторять не раз: смысл занятий — в самих занятиях. В том, чтобы было интересно. В том, что ставить перед собой вопросы и искать на них ответы. В общем, это такой *образ жизни*.

* * *

Чтобы закончить этот раздел, расскажу ещё пару историй. Первая из них относится к моему собственному детству. Не знаю, сколько мне было лет; видимо, что-то около пяти. Мы жили в Витебске. Во дворе нашего дома жил один старик, который любил время от времени поговорить с детьми. Я был «умненький мальчик», и про меня было известно, что я умею считать. Вот однажды он и предложил мне умножить 3 на 5. Я уже знал, что умножить — это значит сложить с собой нужное количество раз. И я пустился в это опасное и полное приключений плавание. Сначала $3+3$; это будет 6, и это пока легко. Идём дальше: $6+3=9$; это лишь незначительно сложнее, но главное — не сама операция; главное — это не забывать, сколько раз я уже сделал сложение. Теперь начинается самый трудный момент: $9+3$. Это, во-первых, переход через десяток, а во-вторых и снова — как бы не упустить, сколько раз я уже сложил... И уже почти приходя в отчаяние, на последнем пределе своих умственных возможностей, я сложил 12 и 3 и сказал:

— Пятнадцать.

— Правильно! — ответил старик. — А как ты считал?

Я объяснил.

— Зачем же так сложно? — удивился он. — Можно было просто сложить $5+5+5$.

Я был совершенно сражён и одновременно сбит с толку. Сложить $5+5+5$ — это проще простого: $5+5=10$ (тривиально), и $10+5=15$ (тоже тривиально). И, что самое удивительное, в результате в самом деле получается 15. Но почему!!?

Эта событие надолго запало мне в память. Я искал объяснения — и не находил. В школе я узнал, что в шестом классе начнётся алгебра, и там будут *формулы*. Детям редко приходит в голову мысль, что можно заглянуть в учебник за будущие классы. И я терпеливо ждал шестого класса, надеясь, что тогда-то и придёт долгожданное просветление. В шестом классе я написал формулу $ab = ba$, долго и тупо смотрел на неё, но никакого просветления так и не произошло. В девятом классе я попал в знаменитый Колмогоровский физико-математический интернат при Московском университете. Программа там была продвинутой; мы довольно быстро перешли к изучению групп, полей и колец. «Господи, какой же я был глупый, — решил я. — Ведь это же просто-напросто *аксиома*, и называется она *коммутативностью*. А аксиомы не доказывают».

Время шло, и я ещё слегка поумнел. Я понял, что аксиома-то она аксиома, но ввели её не потому, что кто-то так распорядился, не по чьему-либо капризу, а потому что это свойство реально выполняется при умножении натуральных чисел.

(Заметим здесь в скобках, что, например, возведение в степень — т. е. «повторяющееся умножение» — вовсе не коммутативно. Умножьте 5 само на себя 3 раза, а потом умножьте 3 само на себя 5 раз, и результаты получатся совершенно различные. А вот для «повторяющегося сложения» почему-то получается одно и то же.)

И уж не помню сейчас, когда и почему я осознал, что речь идёт просто о том, чтобы по-разному сосчитать одно и то же множество предметов. Мы берём «сколько-то» камешков и выкладываем их в три ряда по пять штук; а это то же самое, что выложить их в пять рядов по три штуки — смотря что считать рядом (рис. 9). Так значит, всё дело в том, что если одни и те же предметы считать в разном порядке, то результат должен получиться один и тот же! И, значит, не так-то уж это свойство и очевидно, если его осознание потребовало стольких лет и стольких умственных усилий.

И в заключение — ещё одна сценка. Точнее, подслушанный диалог. Участников двое — муж и жена; оба пенсионеры, обоим около 80 лет. Поэтому речь и движения персонажей происходят в замедленном темпе. Жена собирается готовить на ужин яичницу. Неожиданное препятствие: сковородка, в которой она обычно это делает, осталась непомытой после обеда.

— Митя, большая сковородка грязная.

Муж — с оттенком раздражения, так как его оторвали от его занятий:

— Сделай в маленькой.

— Так я боюсь, что мало будет...

Муж — слегка поразмыслив над этим обстоятельством и пожимая плечами:

— Тогда помой большую.

А как же закон сохранения количества вещества?!

Очень легко себе представить иные обстоятельства. Тем же самым двум старичкам даётся формальный «тест на интеллект». Вопрос: если разбитые яйца перелить из одной сковородки в другую, то содержимого станет (а) больше; (б) меньше; (в) останется столько же; (г) результат операции зависит от размера сковородок. Я нисколько не сомневаюсь, что в этом случае ответ был бы правильным. И это наводит на разные вопросы, которые я даже затрудняюсь отчётливо сформулировать. Вопросы, во-первых, о соотношении между формально выученным и реально усвоенным. И, во-вторых, о том, в какой степени мы в нашем повседневном поведении

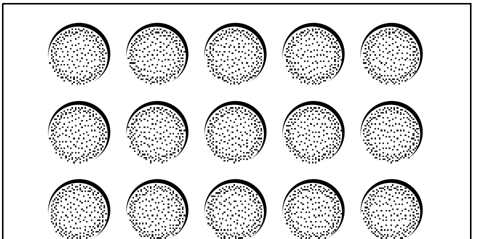


Рис. 9. Здесь 3 горизонтальных ряда по 5 кружков в каждом, т. е. всего $5 \cdot 3$. Но можно также и сказать, что здесь 5 вертикальных рядов по 3 кружка в каждом, т. е. всего $3 \cdot 5$. Если верить в то, что как ни считай, получишь одно и то же, то следует заключить, что $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

руководствуемся «правильными рассуждениями», и в какой — некой наглядной «видимостью», тем, что «кажется глазу». (Видите, как много здесь кавычек (а также и скобок)? Это всё оттого, что не получается у меня выразить свою мысль «коротко и ясно».)

О пользе чтения книг по психологии

Математиков не всегда легко убедить в том, что книги по психологии представляют хоть какой-нибудь интерес. Их там смущает всё: и терминология, и уровень доказательности, и сами постановки задач. Я помню один диалог, оборвавшийся в самом начале. Я стал рассказывать молодому студенту об одной серии экспериментов.

— Вот, например, — сказал я — такой вопрос: способен ли двухмесячный младенец обучаться?

В ответ мой собеседник только хмыкнул.

— А что, разве это не очевидно? Спросили бы у меня, я бы им сразу сказал.

Что тут можно возразить? Ну конечно же может, это и в самом деле всем очевидно. Аналогичным образом отреагировал один мой знакомый француз на известие о том, за что была присуждена очередная Нобелевская премия по экономике. Её получатель доказал, что экономическое поведение людей не является рациональным, логичным.

— Мог бы спросить у моей консьержки, — пожал плечами француз.

Я чувствовал, что мой студент неправ, но возражение сумел придумать только много позже. Давайте зададим себе вопрос из другой области: одинаковы ли законы физики в разные моменты времени и в разных точках пространства? Ответ, пожалуй, столь же очевиден, как и в предыдущем случае. Любой философ скажет вам, что да, одинаковы, ибо иначе их просто не следует считать законами физики. И он, конечно, прав. Ну, а что скажет не философ, а физик?

Положение физика более сложно: он обязан иметь дело не с общими словами, а с конкретными законами — скажем, с какими-нибудь там уравнениями Максвелла. Расплывчатую фразу про разные моменты времени и разные точки пространства тоже следует конкретизировать, объяснив, что и как меняется при переходе от одной системы координат к другой. Доведите эту идею до конца — и вы откроете сначала преобразования Лоренца, а потом и теорию относительности Эйнштейна. А ведь это только первый шаг: уравнения Максвелла описывают электромагнитные взаимодействия, а существуют и иные: слабые, сильные, гравитационные. Уже в течение нескольких веков, начиная с Галилея, физики пытаются придать конкретную форму «очевидному» философскому принципу об одинаковости законов в пространстве и во времени, и путь ещё далеко не закончен. Где-то на горизонте маячит «единая теория поля».

Итак, корень проблемы в том, чтобы задавать вопросы не в общефилософских терминах, а говорить о конкретных наблюдаемых и проверяемых в опыте явлениях. Конечно, до формул и уравнений психологии далеко. Тем не менее — давайте вместо вопроса о том, «может ли ребёнок обучаться», спросим о чём-нибудь более конкретном. Ну, например, так: может ли он в возрасте двух месяцев запомнить последовательность из четырёх битов? Скажем, такую: 0011? По сравнению с исходным глобальным вопросом звучит несколько убого, но ведь даже и на такой примитивный вопрос дать *экспериментальный* ответ не так уж просто.

Первая трудность: каким образом мы можем узнать, что ребёнок в самом деле усвоил переданную ему информацию «0011»? Это пока ещё не очень сложно. В рамках доступных ему действий можно, скажем, проверить, может ли он повернуть голову два раза влево и затем два раза вправо для того, чтобы добиться какой-нибудь цели.

Вторая трудность, на этот раз гораздо более существенная: какую цель можно ему предложить, и как сделать так, чтобы он захотел её добиться? Чем можно его заинтересовать? В опытах над животными поступают просто: их, извините, морят голодом. Доводят вес подопытного животного до 80% нормального, и тогда в поисках пищи оно демонстрирует чудеса интеллекта. С детьми, слава Богу, так никто не поступает. А тогда что?

В психологии часто так случается, что главное открытие совершается не на дороге от вопроса к ответу, а где-то сбоку. Так и здесь: именно ответ на последний вопрос открывает нам глаза на какие-то новые истины. Исследователи испробовали множество разных «привлекательностей»: яркие погремушки, музыкальные перезвоны, порою целые фейерверки. Оказалось, что вполне достаточно обыкновенной лампочки. Единственным же настоящим стимулом для ребёнка является сама *возможность обучаться*!

Дело происходит примерно так. Малыш случайно обнаруживает, что когда он поворачивает голову влево, загорается лампочка. Несколько раз он «подтверждает» своё наблюдение; потом успокаивается, и лишь время от времени, через сравнительно долгие промежутки, проверяет, всё ли в порядке. В какой-то момент вдруг оказывается, что нет, не всё в порядке: лампочка больше не загорается. Он начинает активно искать причину — до тех пор, пока не обнаруживает, что чтобы её зажечь, нужно повернуть голову один раз направо и один раз налево. Наступает очередная серия подтверждений и очередной период успокоения. И снова вдруг выясняется, что лампочка не реагирует на «приказ». Опять следует активный поиск — и очередное решение. И так далее, вплоть до 0011. (Описание этого эксперимента заимствовано из книги Т. Бауэра «Психическое развитие младенца», М.: Прогресс, 1985.)

Вот ведь оно, оказывается, как обстоит дело. Главным стимулом для учёбы является не награда, не «обобщённая конфета» после урока, а сама учёба, сама возможность узнавать новое. От нас требуется только не растоптать, не подавить эту устремлённость к новому знанию, а также, наверное, создать ребёнку достаточно разнообразную среду, чтобы его интерес к окружающему миру не ослабевал. И здесь психология тоже может дать нам в руки совершенно неожиданные ключи. Цитирую из книги В. С. Ротенберга и В. В. Аршавского «Поисковая активность и адаптация» (М.: Наука, 1984):

«Американские учёные Джонс, Нейшн и Массад исследовали четыре группы испытуемых. На начальном этапе исследования первая группа получала задачи, ни с одной из которых не могла справиться (0% успеха). Вторая группа получала задачи, каждую из которых удавалось решить (100% успеха); испытуемые третьей группы справлялись с каждой второй из предъявленных задач (50% успеха). После этого испытуемым всех трёх групп и четвёртой контрольной предъявляли серию принципиально нерешаемых задач, т. е. пытались выработать у них обученную беспомощность. На завершающем этапе исследования всем испытуемым предлагались средние по трудности, но решаемые задачи и выяснялась эффективность предшествующей серии. Оказалось, что иммунизация к обученной беспомощности создавалась только у испытуемых третьей группы. Именно они лучше всего решали задачи на завершающем этапе. Первая, вторая и контрольная группы существенно между собой не различались. Наиболее интересно в этих результатах то, что и стопроцентный успех и стопроцентная неудача в одинаковой степени не повышали устойчивость испытуемых к последующей неудаче».

Очень сходные результаты получаются в опытах и над детьми, и над щенками, и над крысятами. Наводит на размышления, не правда ли? До сих пор расстраиваюсь, что мне так и не удалось рассказать обо всём этом студенту.

Мы хотим, чтобы наши дети выросли умными и развитыми, не так ли? Что мы должны для этого делать?

В книге Ури Бронфенбреннера «Два мира детства. Дети в США и СССР» (М.: Прогресс, 1976) автор рассказывает об одном проекте, получившем впоследствии название «тридцатилетний эксперимент». Речь в нём шла о том, чтобы «вывести в люди» умственно отсталых детей, содержащихся в специальном приюте, добиться того, чтобы они могли жить самостоятельно. Эксперимент состоял из многих этапов, но наиболее трогательным, если не душераздирающим, был самый первый из них. Каждого ребёнка прикрепили к своего рода подставной суррогатной «маме»; такими мамами служили умственно отсталые женщины, содержащиеся в том же приюте. Через два года специальные измерения показали, что уровень интеллекта у детей вырос в среднем на 20—30 пунктов; в то же время уровень интеллекта у детей контрольной группы снизился. На меня сильнейшее впечатление произвёл тот факт, что эти мамы явно не могли вести со своими детьми какие бы то ни было развивающие занятия. Никаких математических кружков, никаких головоломок, никаких интеллектуальных игр. Всё, что они могли — это обнимать детей, целовать, пеленать и вообще всячески с ними тетёшкаться. И вот, оказывается, что по крайней мере в определённом возрасте эмоциональное тепло, родительская ласка гораздо важнее для развития ребёнка, и в том числе — особо это подчёркиваю — для развития его *интеллекта,* чем любые другие формы деятельности и обучения. Родители, не забывайте об этом!

Не следует превращать эту книгу в психологическое попурри (к тому же не очень квалифицированное). Но я всё же вернусь ещё раз к феноменам Пиаже и перескажу один опыт, который — единственный — привёл к частичному успеху и к усвоению закона сохранения. Речь идёт о «познавательных конфликтах» Яна Смедслунда (они описаны, в частности, в упоминавшейся выше книге Джона Флейвелла). Цитирую:

«Если, например, данный испытуемый был склонен полагать, что удлинение шарика увеличивает количество пластилина, а убавление кусочка уменьшает его количество, экспериментатор производил сразу и ту, и другую операцию [...] Подобная процедура была выбрана для того, чтобы *заставить испытуемого приостановиться, заставить его колебаться между взаимно конфликтующими стратегиями* [выделено мной — А. З.]; автор ожидал, что в результате ребёнок будет медленно склоняться к более простой и последовательной схеме убавления-прибавления [...]».

Весьма характерно, что в этих опытах ребёнку ничего не объясняли и ничего не проверяли на весах. «Научить» удалось четырёх детей из тринадцати, и «разучить» их обратно потом не удалось.

Я знаю за собой такое свойство — делать далеко идущие выводы при недостаточных основаниях; а также и порой противоречить самому себе (совсем недавно твердил, что нет у нас такой цели — научить ребёнка законам сохранения, и вдруг вроде бы пытаюсь объяснить, как это можно было бы сделать). Неважно! Я хочу возвести в принцип, в основу моей педагогики вот эти слова: *заставить приостановиться, заставить колебаться между взаимно конфликтующими стратегиями.* Этот подход я противопоставляю другому, который исходит из того, что интеллект — это умение быстро решать головоломки. Рискуя уже в который раз впасть в возвышенный тон, я бы сказал: наша цель — воспитание такой породы людей, которую можно было бы назвать *человек задумывающийся.*

Конкретные примеры будут дальше.

Как относиться к теориям

Передо мной увлекательнейшая книжка со скучным названием «Математическое моделирование в экологии: историко-методологический анализ». Авторов пятеро: В. Н. Тутубалин, Ю. М. Барабашева, А. А. Григорян, Г. Н. Девяткова, Е. Г. Угер; лидером команды несомненно является Валерий Николаевич Тутубалин, известный математик, а также и известный критик применений математики в других науках. Вроде бы тема не имеет отношения к тому, что мы здесь обсуждаем. Но именно в этой книге я впервые нашёл чёткую формулировку того, что долго и безуспешно пытался высказать сам — того, как следует относиться к теоретическим построениям. По отношению к психологии это, мне кажется, ещё более верно (и важно), чем по отношению к экологии.

Среди прочего в книге рассматриваются классические уравнения Лотки—Вольтерра. Исходная идея достаточно проста. Имеются, скажем, лисы и кролики, причём лисы поедают кроликов. Последних становится всё меньше, и у лис возникает дефицит еды. Теперь уменьшается численность лис; жизнь у кроликов становится менее опасной, и теперь уже их численность возрастает. У лис изобилье еды, и их количество начинает расти; число кроликов опять падает, и всё начинается сначала. Эта модель довольно легко переводится на язык дифференциальных уравнений. Удача: уравнения решаются в явном виде (редкий в этой теории случай), и получаются аккуратные циклы на фазовой плоскости и аккуратные колебания, если рассматривать обе численности как функцию времени.

Теория готова; теперь надо её проверять экспериментально. Натурные эксперименты, т. е. измерения численностей видов (не обязательно лис и кроликов, но любых двух видов, один из которых поедает другой, например, щук и карасей) в живой природе, прямо скажем, ни к чему разумному не приводят. Это и понятно: слишком много вмешивается посторонних факторов. Попытки как-то выделить и учесть влияние этих факторов оказываются слишком сложными и в итоге неубедительными. Есть ещё возможность проведения лабораторного эксперимента, где все факторы строго контролируются, да и виды выбираются такие — вроде дрожжей — с которыми гораздо легче иметь дело, чем со зверями. Но даже и в этом случае статистическая обработка данных проведена не очень квалифицированно (это 30-е годы, математическая статистика только создавалась), и придти к определённым выводам трудно. В районе Гудзонова залива даже было обнаружили колебания численности зайцев и рысей. Но вот беда: циклы на фазовой плоскости крутились в другую сторону — как если бы хищниками были зайцы, а жертвами — рыси. Статья на эту тему саркастически называлась «Едят ли зайцы рысей?».

Одним словом, подтвердить теорию на опыте не удаётся. Каков же вывод? Выбросить её в корзину? Некоторые философы — критики науки — считают именно так. Но авторы книги — не философы, а работающие учёные, и они приходят к совершенно противоположным выводам. Ничего подобного, говорят они. В процессе попыток подтвердить (опровергнуть, уточнить, развить, видоизменить) теорию Лотки—Вольтерра специалисты произвели множество весьма полезных измерений и приобрели совершенно бесценный опыт. Он, быть может, и не выражается в виде простых уравнений; но всё же сегодня экологи знают гораздо больше, чем в 20-х годах прошлого века. Без этого исходного толчка они просто не знали бы, с какого конца приниматься за дело, что и зачем измерять. Они так до сих пор и оставались бы на уровне общих деклараций типа «всё в природе взаимосвязано».

Следует только иметь в виду, что каждый автор концепции вкладывает в своё детище так много души, что потом уже верит в неё как в Священное Писание. Хорошо мне, дилетанту: я могу жонглировать разными, в том числе и противоречащими друг другу теориями, могу сам изобретать новые на пустом месте (или почти) и назавтра отрекаться от них. Среди психологических теорий есть такие, которым я стопроцентно доверяю: примером являются феномены Пиаже. Есть такие, в которые я не верю ни на грош; к ним относится, в частности, распространённая в нашей стране «теория поэтапного формирования умственных действий», а также то, как тот же Пиаже объяснял освоение ребёнком родного языка (читайте на эту тему превосходную книжку: Steven Pinker «The Language Instinct: How the Mind Creates Language»). Но если относиться к теориям без прозелитизма, то интересны они все, так как все дают пищу для ума — и материал для задач!

Авторы книги об экологии рассказывают нам такую историю-притчу. Небольшая группа путешествует по берегам и островам Белого моря. Знающие люди сказали, что на некотором острове имеется пресноводное озеро, в котором окунь прекрасно клюёт на макароны. А может, мы как раз на этом острове? Как же пройти к озеру? Идти напролом по карельской тайге, перемежаемой горами и болотами — небольшое удовольствие. Идея («теория»)! Вода из озера должна куда-то деваться; наверное, из него выпадает ручей; а вдоль ручья может идти тропа. Идём вдоль берега моря; и в самом деле, вскоре обнаруживается ручей, а вдоль него — тропа. Всё прекрасно! Поднимаемся по тропе вдоль ручья. Вскоре, однако, ручей исчезает вовсе, тропа вместе с ним, «и лезем мы куда-то на высокую гору, с которой ничего, кроме леса, не видно. Некоторое время бродим без цели и смысла, вдруг каким-то образом попадаем на тропу, которая и выводит к озеру». И окуни там в самом деле великолепные! Мораль: *теория нужна не для того, чтобы правильно отражать реальность, а для того, чтобы начать что-то делать — а дальше видно будет.* (Хотя, как отмечают авторы в другом месте, правильная теория всё же лучше, чем неправильная.)

Так что пора и мне «начать что-то делать» и от болтовни на общие темы вернуться к нашему кружку.

2

Кружок с мальчиками — первый год

Как я уже упоминал неоднократно, я начал вести кружок в марте 1980 года, но записывать содержание занятий стал только с февраля 1981 года. Первые 20 занятий «для вечности» утеряны, тут уж ничего не поделаешь; собственно дневник начинается с 21-го занятия.

Важное пояснение. К каждому из занятий предпослан заголовок; но его не следует воспринимать слишком серьёзно. На занятии обычно бывало несколько разных задач, а заголовок отражает лишь одну из них, чаще всего основанную на новой идее или примечательную по какой-то иной причине. Иногда, впрочем, он связан вообще не с задачей, а с каким-то происшествием или новым поворотом событий.

Занятие 21. Лист Мёбиуса

4 февраля 1981 года (среда). 10^{30}—11^{00} (30 мин.). Дима, Петя, Женя, Андрюша.

Задание 1. На их глазах разрезал лист на 4 полоски, из которых мы склеили (с моей помощью) 4 листа Мёбиуса.

Для читателя-нематематика должен пояснить, что такое лист Мёбиуса. Если взять узкую длинную полоску бумаги и склеить её концами «обычным способом», то получится цилиндр: он показан на рис. 10 слева. Если же предварительно перевернуть один из концов на 180°, получится фигура, показанная на том же рисунке справа. Она и называется листом Мёбиуса. У цилиндра есть две поверхности — внешняя и внутренняя; их можно, например, покрасить в два разных цвета. А вот у листа Мёбиуса только одна поверхность. Попробуйте закрасить каким-нибудь цветом его внутреннюю сторону — и вы незаметно перейдёте на внешнюю.

Себе склеиваю обычный цилиндр (для сравнения). Два муравья соревнуются — у кого домик интереснее (или кто сумеет то-то и то-то).

На одном из листов (Димином) показываю, как муравей полз по одной стороне, а попал на другую. На другом (Женином) показываю, как муравей полз по краю и оказался на другом краю.

[Надо было более медленно и спокойно дать им убедиться (каждому на своём листе), что есть всего одна сторона и всего один край.]

Разрезаю по средней линии цилиндр, затем лист Мёбиуса. Оба раза прошу угадать, что получится. Потом полученную штуку снова разрезаю по средней линии, опять прошу угадать.

[Во второй раз вместо средней линии можно резать на расстоянии 1/3 ширины от края: в этом случае зацепление лучше видно.]

Показываю шарик, как он склеен из двух половинок; объясняю, что край исчезает. Потом показываю, как из двух резиновых трубок склеивается тор (у него тоже нет края). Рассказываю, что будет, если склеить два листа Мёбиуса по краю (края не будет, но можно перейти с внешней стороны на внутреннюю). Впечатления не производит. Рассказываю про молоко, которое было внутри, а стало снаружи.

— Ну и что? Просто пролилось.

[Надо было сказать, что при этом оно нигде не переливалось через край, так как никакого края вообще нет.]

Задание 2. Сколько стоит билет в метро, в автобусе, в троллейбусе, в трамвае?* Какие автоматы стоят в метро? (Принимают только пятаки и пропускают внутрь. Билетов в метро не бывает.) Какие автоматы бывают в автобусе? (Пять копеек в любом наборе — билет.)

Теперь нам с вами надо сложить пять копеек самыми разными наборами.

---

* Боюсь, что читатели уже забыли, сколько стоили билеты в ту эпоху: автобус и метро — 5 копеек, троллейбус — 4 копейки, трамвай — 3 копейки.

(Монеты выкладываются на стол отдельными кучками. Чтобы один участник мог выложить 5 копеек всеми возможными способами, ему потребуется

$$1\times5\ \text{коп.}+2\times3\ \text{коп.}+\\+4\times2\ \text{коп.}+11\times1\ \text{коп.})$$

Задание было выполнено менее успешно, чем я ожидал (долго не понимали, что требуется; ошибались в счёте; повторяли уже имеющиеся комбинации; зацикливались на определённой группе монет; не могли найти нужную монету, так как искали в одной и той же кучке: «А мне всё единички попадаются!»).

По-моему, я видел, что Жене «всё единички попадаются» из-за того, что он ищет не в той кучке. Я не знал, говорить ему или нет, и эта мысль отвлекала столько внимания, что я не замечал, что сам не могу найти нужную монету по той же причине. — Дима.

[Надо было начать с трамвая, потом перейти к троллейбусу и уже потом к автобусу. Ещё лучше — начать с телефонного автомата (2 копейки).]

Занятие 22.
Что больше, целое или часть?

14 февраля 1981 года (суббота). 10^{35}—11^{20} (45 мин.). Дима, Женя, Петя, Андрюша.

Задание 1.

Вопрос Диме:

— Чего больше — зайцев или зверей?

— Зверей.

— Почему?

— Потому что *кроме зайцев* (выделено мной) бывают ещё попугаи, волки, кошки, собаки и т. д.

(Обсуждение того, что попугаи — не звери.) Я даю своё объяснение:

— Ведь зайцы — это тоже звери.

Вопрос Андрюше:

— Чего больше — гусей или птиц?

Андрюша объясняет, что больше птиц, так как они водятся повсюду — в Индии, в Грузии и даже на Северном полюсе. Таким образом, заимствована внешняя схема Диминого ответа (что разных птиц очень много), но пропущен центральный момент: «кроме». Я:

— Но ведь гусей тоже очень много (рассказываю, где водятся гуси). Может быть всё-таки гусей больше, чем птиц?

Андрюша не знает.

Вопрос Жене:

— Чего больше — мужчин или людей?

Женя считает, что больше людей, но объяснить не может. Правильно объясняет Дима:

— Потому что мужчины — это тоже люди. Это двойные люди.

(Обсуждение, являются ли дедушки и папы мужчинами.)

Вопрос Пете:

— Чего больше — мух или насекомых?

— Мух.

— Почему?

— Потому что они повсюду летают.

— А насекомые не повсюду?

— Нет.

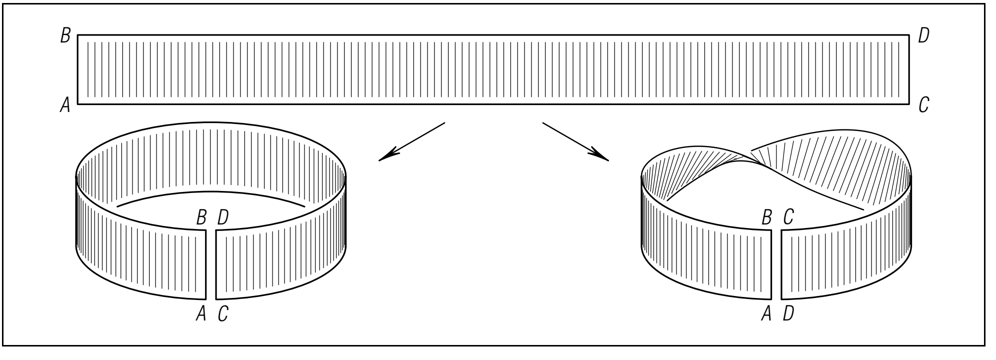


Рис. 10. Два способа склеить концы бумажной полоски. Слева — обычный цилиндр, справа — лист Мёбиуса.

— А мухи — это тоже насекомые или нет?

— Насекомые.

(Снова обсуждение того, что не все насекомые умеют летать.) Таким образом, правильно отвечал только Дима. Но, как показало четвёртое задание, и он понятие включения классов ещё до конца не освоил.

Задание 2. Продолжение вопросов (в третий раз) про мальчиков и девочек в очках и без очков — ещё четыре вопроса, по одному на каждого из ребят.

В этой задаче детям предлагаются карточки, на которых нарисованы мальчики и девочки, причём некоторые из них в очках, другие без очков. Требуется ответить, правильны или нет утверждения типа «все дети в очках — мальчики», «имеется девочка без очков», и т. п. Любой из этих вопросов (которых можно сочинить немало) можно задавать про любую карточку, так что эта задача весьма изобильна, ею можно заниматься долго.

Петя заметил, что у него и у Жени оказались одинаковые картинки, Е и Г. Алла подсказывает, что и утверждалось одно и тоже: «нет ни одной девочки без очков» и «все девочки — в очках» — это эквивалентные утверждения. Андрюша справлялся с заданием слабее других и всё время объяснял что-то про мальчиков, хотя его вопрос был о девочках. Причина в том, что он не был на тех занятиях, когда это задание было первые два раза.

Самостоятельно (т. е. без моей помощи) справился с заданием один Дима. Но у него и вопрос был легче: про всех детей, а не про мальчиков или девочек.

Снова немного пообсуждали проблему пустого множества.

[Это вот о чём: спрашивается, верно ли для данной картинки, что «все девочки — в очках», а девочек на ней вовсе нет. Ребята, совершенно естественно, отвечают, что, мол, нет, неверно.

— Ах, вот как? — говорю я. — Тогда покажите мне девочку без очков.

— Но здесь вообще нет девочек!

— Вот я и говорю, что все, которые есть — в очках.

— Но их нет никаких!

— А я и не говорю, что есть...

И дальше в том же духе.]

Смешная сценка вначале: когда я только вынул карточки, все, перебивая друг друга, закричали, показывая на них:

— Blue! Yellow! Brown! Grey!

Я, воспользовавшись моментом, спросил:

— Is it a boy or a girl?

— It's a boy. (Андрюша шутит.)

— No, Andrew, that's not true. It's a girl*.

Задание 3. Все дети получают по карточке вроде той, что показана на рис. 11 (все карточки разные). Нужно догадаться, какой фигурки не хватает.

Первым догадывается Андрюша. Я спрашиваю, как он догадался, он объясняет. Услышав это, все остальные

* Все наши мальчики занимались английским языком. Уроки английского им давала Алла, и порой мы использовали одни и те же картинки.

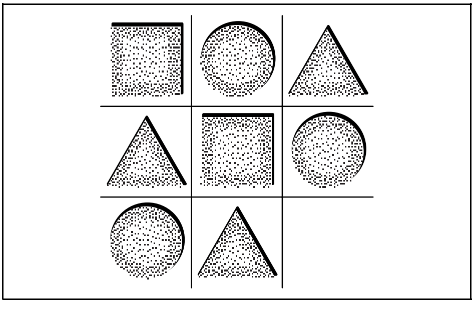


Рис. 11. Какой фигурки не хватает?

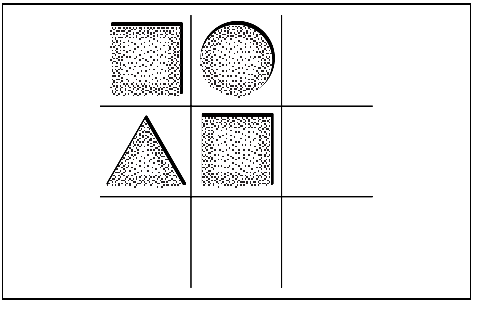


Рис. 12. Дорисовать недостающие фигурки. В каждой строке и в каждом столбце все фигурки должны быть разными (и все три типа должны присутствовать).

тоже решают задачу, но Дима решает неправильно (кажется, Женя решил сам, без подсказки). Я указываю Диме ошибку:

— Смотри, здесь в каждом ряду есть все три фигурки, а в тех, которые ты нарисовал, квадратиков два, а треугольника вообще нет.

Мы ещё раз обсуждаем общий принцип построения узора. Дима исправляет ошибку.

Теперь каждый получает ещё по одной такой же карточке, но пропущена фигурка не в правом нижнем углу, а в более трудном месте (например, в центре). В третий раз каждый получает карточку, на которой нарисованы только 4 фигурки из 9, а оставшиеся 5 надо дорисовать самостоятельно (рис. 12). С обоими заданиями все четверо справились безукоризненно.

Задание 4. Кладу перед детьми вырезанный из ватмана треугольник, спрашиваю, как называется эта фигурка и почему. Потом последовательно предъявляю четырёхугольник (неправильной формы), прямоугольник, квадрат, пятиугольник. Дети называют.

— А как отличить прямоугольник?

Дима:

— У него все углы прямые.

(Мы с Димой отдельно читали «Геометрию для малышей»*, и он уже знает про прямые углы.)

— А можно его назвать четырёхугольником?

— Нет.

— Почему же? Посчитайте, сколько у него углов.

— Четыре.

— Ну вот, значит, он тоже четырёхугольник. У него два имени: четырёхугольник и прямоугольник. Прямоугольник — это четырёхугольник, но особенный, с прямым углом.

Затем то же повторяется с квадратом.

— А можно его назвать прямоугольником?

— Нет.

— Почему?

Дима:

— Потому что он не такой длинненький.

Следует аналогичное обсуждение: я объясняю, что квадрат можно называть тремя именами, и всё будет правильно.

— А скажите теперь, чего больше: квадратов или прямоугольников?

Все:

— Квадратов!

— Почему?

Дима:

— Потому что их легче вырезать.

Я отступаю.

[В этом месте надо было положить все фигурки на стол и попросить посчитать, сколько квадратов, сколько прямоугольников и сколько четырехугольников.]

Следующей фигуркой даю невыпуклый восьмиугольник (рис. 13).

Только один Женя правильно подсчитывает количество углов, остальные не учитывают вмятин. Объясняю, что надо учитывать. Дима:

— А разве это углы? Это же дырки... уго́льные.

Раздаю всем по одному четырёхугольнику неправильной формы (потом ещё по одному, и т. д.); четырёхугольники

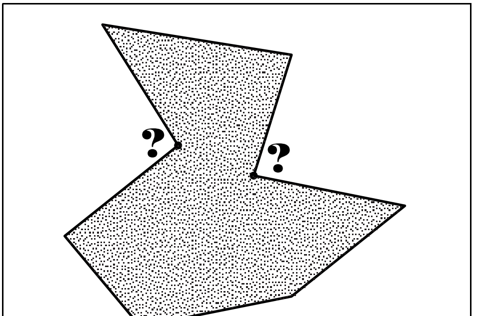


Рис. 13. Восьмиугольник или нет?

* В. Г. Житомирский, Л. Н. Шеврин «Геометрия для малышей» (М.: Педагогика, 1975). К тому же жанру можно отнести книги Л. Л. Сикорук «Физика для малышей» (М.: Педагогика, 1983) и Е. П. Левитан «Малышам о звёздах и планетах» (М.: Педагогика, 1986). Мне больше всех понравилась «Физика» Сикорука. Все три книги превосходно иллюстрированы. Не знаю, переиздавались ли они с тех пор.

все одинаковые. Серия заданий: нужно провести карандашом линию и, разрезав по ней, получить из четырёхугольника:

(а) два треугольника;
(б) два четырёхугольника;
(в) четырёхугольник и треугольник;
(г) пятиугольник и треугольник.

Безукоризненно выполнил все четыре пункта только Андрюша. Остальные иногда ошибались, иногда смотрели решения друг у друга.

Для пункта (б) Дима выдал неожиданное решение: вырезал четырёхугольник внутри, а снаружи тоже остался четырёхугольник, хотя и с дыркой (рис. 14).

Я чуть было по инерции не заявил, что решение неправильное, но вовремя остановился, поняв, что такую оригинальную идею надо не губить, а, наоборот, поддержать. Вдохновлённый, Дима пошёл по проторённой дорожке и решил точно так же пункт (в), вырезав треугольник внутри четырёхугольника, после чего безуспешно пытался решить тем же методом задачу (г), и в результате так её и не сделал.

В конце занятия возник небольшой сумбур и путаница, мальчики чуть было не подрались из-за ножниц (их было всего две пары), да и времени прошло уже много, так что я занятие прекратил, так и не обсудив до конца со всеми вместе пункты (в) и (г).

Андрюша захотел все свои бумажки взять с собой, а с его лёгкой руки и все остальные тоже захотели.

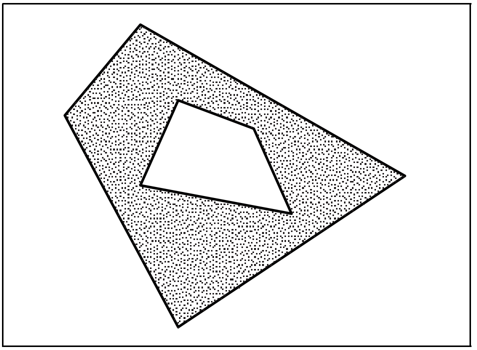


Рис. 14. Что это? Четырёхугольник?

Занятие 23. Ханойская башня

28 февраля 1981 года (суббота). 10^{40}—11^{15} (35 мин.). Дима, Женя, Петя, Андрюша.

Задание 1. Устные вопросы на транзитивность.

Андрюше:

— Один мальчик любит мороженое больше, чем орехи, а орехи больше, чем апельсины. Что он любит больше — мороженое или апельсины?

— Мороженое.

— Почему?

— Потому что он раньше начал есть мороженое.

— Ему что, раньше разрешили, что ли?

— Да.

Диме:

— У дедушки денег больше, чем у папы, а у папы больше, чем у мамы. У кого больше денег — у дедушки или у мамы?

— У дедушки.

— Почему?

— Я знаю, что дедушка больше зарабатывает, чем мама.

— Откуда ты это знаешь?

— Ну просто знаю, и всё.

— Но ты это знаешь из задачи или из жизни?

— Из жизни.

Жене:

— Сосна выше ёлки, а ёлка выше берёзы. Что выше — сосна или берёза?

— Сосна.

— Почему?

Не помню, что ответил Женя, но тут встрял Дима и сказал:

— Потому что сосна самая большая, а берёза самая маленькая. А ёлка самая средняя.

Все обсуждают, так ли это в жизни, показывают жестами.

(Вспомнил, что сказал Женя:

— Сосна раньше начала расти, чем берёза.

Может быть, мой вопрос «почему?» они воспринимают как требование объяснить, «почему так произошло, что…?». Отодвигая в сторону логику, из которой следует, что сосна выше берёзы, объяснить, почему так получилось, что она выше.)

Пете:

— В кастрюле помещается больше воды, чем в чайнике, а в чайнике больше, чем в кувшине. Где помещается больше — в кастрюле или в кувшине?

— В кастрюле.

— Почему?

Опять вмешивается Дима, и они вместе с Петей всё правильно объясняют.

[Надо попробовать неправдоподобные условия: например, «Женя* больше Димы, а Дима больше папы. Кто больше — папа или Женя?»]

Задание 2. Снова, как и в прошлый раз, на столе квадрат, прямоугольник и четырёхугольник. Вспоминаем их названия, прошу посчитать, сколько на столе квадратов (один), прямоугольников (два), четырёхугольников (три). На последний вопрос правильно отвечает один Петя. Наконец, итоговый вопрос:

— Чего больше — квадратов или четырёхугольников?

Тот же результат:

— Квадратов (потому что их много в домах, на крыше, на трубе и т. п.).

Я ничего не объясняю, только спрашиваю, являются ли квадраты четырёхугольниками. Ответ:

— Да.

Задание 3. Из «математического набора первоклассника» выбрано 16 предметов (число, кратное четырём — количеству участников): 2 синих кружочка, 2 жёлтых квадрата, 3 красных квадрата, 4 красных треугольника, 5 зелёных треугольников. На стол кладётся кру́гом верёвка, связанная концами. Я даю каждому по очереди по одной фигурке — нужно класть красные внутри верёвки, не красные — снаружи.

Верёвка убирается, но кладётся другая, точно такая же. Теперь нужно внутрь класть треугольники, а наружу — не треугольники. Снова все справляются (Андрюша делает одну ошибку).

Наконец, на столе обе верёвки, но пока я кладу их непересекающимися. Требуется выполнить оба задания одновременно. После первого прохода я подсовываю Диме (впервые) красный треугольник. Он, не задумываясь, кладёт его в красные. Я обращаю внимание всех на конфликт между условиями, говорю, что это задача для всех.

[Опять спешка! Надо было дождаться конца и потом обсудить, всё ли верно.]

Андрюша:

— А это нарочно так придумано?

— Конечно, нарочно. До сих пор была только подготовка, а настоящая задача началась сейчас. Нужно что-то придумать, изобрести, чтобы этот треугольник лежал и тут, и тут.

Дима пытается положить треугольник в виде мостика на обе верёвки. Я:

— А может быть, передвинуть как-нибудь верёвки?

Андрюша первый догадывается, что нужно положить верёвки одну на другую. (Кажется, Дима тоже догадался, но не успел сказать.)

* Здесь имеется в виду Женя — младшая сестрёнка Димы; ей в этот момент чуть больше года.

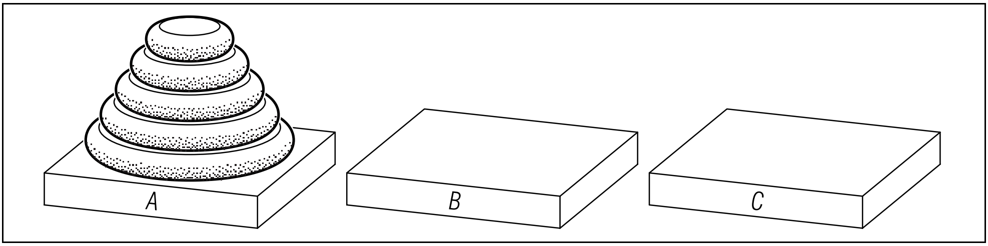


Рис. 15. Ханойская башня в начальной позиции.

Теперь задача решена и легко доделывается до конца (каждый по одному разу получает красный треугольник, так как их всего 4). На чёрном фоне стола белые верёвки и разноцветные фигурки выглядят очень красиво. Я обращаю внимание ребят на этот факт.

Андрюша:

— Это была моя идея!

Дима:

— Нет, моя!

Я ещё пытался что-то сказать о том, что красные треугольники принадлежат сразу двум классам, но без эффекта.

Задание 4. Ханойская башня. Каждый получает экземпляр игры, я объясняю правила.

Эта игра — настоящая жемчужина программистской литературы; в неё можно играть с пятилетними, но и пятикурсникам-информатикам тоже найдётся над чем подумать. В начальной позиции несколько кружков разных размеров уложены друг на друга, образуя башню. Башня стоит на одном из трёх полей (рис. 15).

Цель игры — переставить башню на другое поле, соблюдая следующие правила:

(а) кружки переставляются только с поля на поле; при этом они кладутся друг на друга, так что получаются маленькие башни; нельзя откладывать кружок куда-то в сторону;

(б) при каждом ходе передвигается только один кружок — несколько кружков одновременно переносить нельзя; в частности, запрещено брать по кружку в каждую руку;

(в) можно брать кружок лишь с вершины какой-нибудь башни и класть его только на вершину другой башни; иными словами, нельзя брать кружок из середины башни, и нельзя вставлять его в середину другой башни (чтобы сделать это правило более явным, кружки часто изготовляют с отверстиями в центре, и каждую башню надевают на стержень);

(г) наконец — и это очень важно — запрещено класть больший кружок на меньший.

Одна из промежуточных позиций в игре показана на рис. 16.

Игру изобрёл в конце XIX века французский математик Эдуард Люка. Он же украсил её такой романтической легендой.

Где-то в непроходимых джунглях недалеко от Ханоя есть монастырь Брамы. В начале времён, когда Брама создавал мир, он воздвиг в этом монастыре три высоких алмазных стержня и на один из них возложил 64 диска, сделанных из чистого золота. Он приказал монахам перенести эту башню на другой стержень (с соблюдением всех правил, разумеется). С того времени монахи работают день и ночь. Когда они закончат свой труд, наступит конец времён.

Отдельная задача для более старших детей — оценить хотя бы приблизительно, когда наступит этот самый «конец времён».

[Указание: чтобы переставить башню из n дисков, требуется 2^n-1 операций. Пусть, например, одна операция занимает одну секунду. Сколько времени потребуется для перестановки всей башни при $n=64$?]

Оказалось, что в процессе работы очень трудно проследить за всеми; мальчики постоянно нарушали правила.

Дима уже два раза играл в эту игру, поэтому справляется первый и правил не нарушает. Под конец, когда все были в тупике, они, затаив дыхание, следили за его быстрыми и уверенными движениями.

Петя никак не мог осознать правила и нарушал их до самого конца, хотя ему помогали и я, и Дима, и Наташа*. На Диму он злился за подсказки.

Женя правила осознал, но действовал крайне неуверенно. Почти всё время просидел со снятыми двумя верхними фишками, не зная, что делать дальше.

* Наташа — мама Жени; упоминаемая ниже Люда — мама Андрюши. Родители почти всегда присутствовали на занятиях — ведь занятия длились недолго, а детей надо было потом забирать и уводить домой. С одной стороны, меня это довольно сильно сковывало: я никогда не чувствовал себя на кружке полновластным хозяином ситуации и не мог дать волю эмоциям; с другой — служило к росту моей «славы»: родители ранее и не подозревали, что математикой можно заниматься так интересно и разнообразно.

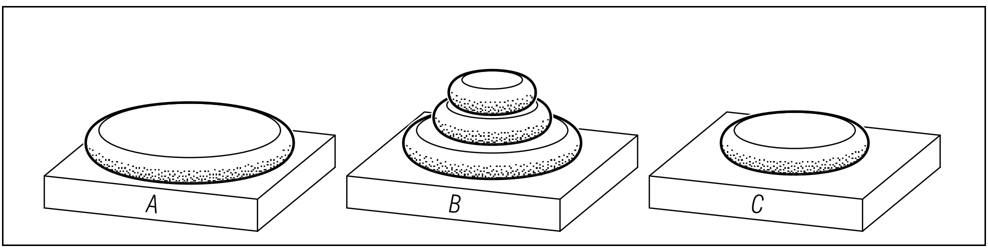


Рис. 16. Башня в одной из промежуточных позиций. В конце игры она должна полностью переместиться на одно из соседних полей — либо на *B*, либо на *C*.

Наташа, Дима и я ему помогали. На Диму он злился, говоря, что у него не получается из-за того, что Дима мешает. Дима над ним издевался, говорил, что он нарочно помогал Пете, чтобы Петя закончил раньше Жени и Андрюши, что все уже погуляют, а Женя всё ещё будет сидеть и т. п. Пришлось сделать ему довольно резкое замечание.

Андрюша, за которым я недоглядел, переставил свою башню очень быстро, быстрее, чем смог бы я сам. Я попросил его повторить, но он, поняв, что, видимо, сделал что-то не так, категорически отказался, сказав, что он решил задачу первым, и что второй раз он повторять не будет. Я сказал:

— Я думаю, Андрюша, что ты нарушал правила.

— Когда?! — нагло заявил Андрюша, понимая, что я не смогу его уличить, так как ничего не видел.

Но тут его выдала Люда. Андрюша очень расстроился. Люда его утешала, стала показывать, как играть по правилам, но в итоге всё сделала сама. После того, как закончил Петя, Андрюша сказал:

— А Пете очень много подсказывали, — явно забыв, что сам вообще не справился с задачей. Он тоже пытался издеваться над Женей.

Мой недостаток — я реагирую на такое поведение так, как будто оно исходит от взрослых, а не от маленьких детей. Принцип «ругать поступок, а не ребёнка» теоретически мне знаком, но практика сильно отстаёт. Самое главное, что у меня самого портится настроение, и это отражается на общей атмосфере гораздо сильнее, чем детские глупости.

Занятие 24. Немножко топологии

7 марта 1981 года (суббота). 10^{35}—11^{10} (35 мин.). Дима, Петя, Женя.

Задание 1. Вопросы на транзитивность с невозможными условиями.

Диме:

— Жили были девочка Женя, мальчик Дима и папа. Женя была больше Димы («Ой!»), а Дима — больше папы. Как ты думаешь, кто больше: Женя или папа?

(Смех.) Отвечает правильно:

— Женя больше, ведь она самая большая. Она ведь больше Димы, а Дима сам больше папы.

Жене:

— Однажды червяк, велосипед и самолёт стали соревноваться, кто из них умеет быстрее бегать. Оказалось, что червяк бегает быстрее, чем велосипед, а велосипед быстрее, чем самолёт. Как ты думаешь, кто быстрее: червяк или самолёт?

Женя отвечает правильно, но долго не решается что-нибудь сказать (качается взад-вперёд, падает на диван, хихикает). Я его тороплю, Наташа тоже вмешивается, но это не помогает. Оказывается, его смущало то, что самолёт не бегает, а летает.

Пете:

— Жили на свете три мальчика: Дима, Петя и Андрюша. Дима был старше Пети, а Петя старше Андрюши. Кто старше: Дима или Андрюша?

Петя отвечает и объясняет правильно.

[Замечание. С некоторой натяжкой можно считать, что такие вопросы представляют собой пример *познавательного конфликта* по Яну Смедслунду. То есть, нужно выбрать одно из двух противоположных объяснений. Если муравей тяжелее собаки, а собака тяжелее слона, то вывод о том, кто тяжелее всех, можно сделать: (а) на основе житейских соображений (очевидно, что слон тяжелее, так как он очень большой, а муравей маленький); (б) на основе транзитивности, т. е. исходя из условий задачи. Может быть, потому юмор и стимулирует развитие интеллекта, что создаёт нечто вроде познавательного конфликта. Впрочем, натяжка здесь довольно велика: ведь дети сразу понимают, что нужно говорить «всё наоборот».]

Задание 2. Топологические закономерности (на основе классификации 8 карточек на 4 и 4).

Я напоминаю игру «четвёртый — лишний». Объясняю, что сейчас будет не один лишний, а надо разделить карточки на две равные кучки (заодно спрашиваю, сколько будет 8 поделить на 2).

Наборы такие (противопоставления):

(1) выпуклые — невыпуклые (это не топологическое, а геометрическое свойство), все фигуры гомеоморфны окружности;

(2) одна фигурка — две фигурки;

(3) всегда две фигурки, но 4 раза одна внутри другой, а 4 раза — снаружи;

(4) 8 топологических окружностей, четыре из них с торчащими «усами»;

(5) 8 окружностей, из четырёх торчат по 2 уса, из остальных четырёх — по 3 уса;

(6) на каждой карточке — две похожие по форме фигурки, одна внутри другой, соединённые мостиками; мостиков либо два, либо три.

Большие трудности вызвали задачи 3 и 6, задача 5 оказалась средней трудности, остальные решались мгновенно.

Проблема другого рода: как только карточки появлялись на столе, мальчишки норовили сразу, ещё толком ничего не разглядев, утащить побольше карточек себе. То и дело возникали конфликты, карточки мялись, я раздражался, и, главное, ничего толком нельзя было разглядеть. В конце концов пришлось навести строгий порядок и вообще запретить трогать карточки, пока не указано решение и я его не одобрю.

Лёгкие задачи (1, 2 и 4) решал, как правило, Петя. Они с Димой были наиболее активны, но Петя ориентировался быстрее. Жене уже ничего не доставалось. Дима изобретал множество «объяснений», но часто довольно вычурных, и не всегда помнил об условиях задачи (например, вместо разбиения $4+4$ предлагал $2+6$).

Задачи 5 и 6, более трудные, после всеобщего тупика решил Женя. Надо сказать, что и задачи на «четвёртый — лишний» он решал тоже очень хорошо. Мне большого труда стоило набраться терпения его выслушать (как только внимание обращено непосредственно к нему, он замолкает) и оградить его карточки от Димы и Пети.

Задачу 6 Дима решил иначе, чем было мной задумано: разделил все фигуры на прямолинейные и криволинейные. Мне пришлось согласиться. После этого он протестовал против дальнейших попыток решить задачу другим способом, так что у нас даже состоялся неприятный разговор о том, что кружок не для него одного, а для всех.

В задаче 3 мне пришлось самому подсказать решение. Я сказал, что все их закономерности, которые они предлагали (особенно Дима), очень сложные, а я могу объяснить всё очень просто, сказав всего два слова. Одно слово скажет, что положить в одну кучку, а другое — что в другую. И потом сказал эти слова: «внутри» и «снаружи».

Задание 3. Ханойская башня (второй раз).

Дима закончил первым. Женя (при моих примерно пяти подсказках) справился вторым и очень этому радовался, прыгал на месте и дрыгал ногами. Петя снова делал всё подряд по подсказкам Димы (у него эта игра почему-то не идёт), только первые ходов 5—6 и последние два хода сделал сам.

Я пытался ему не дать, чтобы потом говорить, что всё сделал за него. — Дима.

Кроме перечисленных трёх заданий планировалось ещё одно — на множество и его подмножества, но не хватило времени. Может, это и к лучшему, а то было бы сегодня слишком много задач на карточках.

Занятие 25. Мальчик в лифте

14 марта 1981 года (суббота). 10^{40}—11^{00} (20 мин.). Дима, Петя, Женя, Андрюша.

Занятие длилось 20 минут, так как Женя опоздал, а я торопился — мне надо было уйти не позже 11^{00}.

Задание 1. Одному маленькому мальчику, который жил на 16 этаже, мама разрешала самому ездить на лифте. Но ездил он как-то странно: когда ехал вниз, то доезжал с 16 до 1 этажа, а когда ехал вверх, то доезжал почему-то только до 8 этажа, а дальше шёл пешком. Чем вы можете это объяснить?

— Это у него привычка такая была, — сказал Андрюша.

— Это он тренировался.

И так далее.

— А когда он немножко подрос, то стал ездить до 10 этажа, а уже дальше шёл пешком.

— Наверное, он стал более ленивый, — сказал Дима.

— Но ведь в задаче не сказано, что он был ленивый или не ленивый, и хотел он тренироваться или нет. Сказано только, что он был маленький.

— Ну и что?

Андрюша резюмирует:

— Просто у него такая привычка была, и всё.

Я оставляю эту задачу на дом.

[Я надеялся, что им, исходя из их жизненного опыта, будет легко решить эту задачу, но не тут-то было.]

Задание 2. На блюдце — фишки 4 цветов, по 13 штук каждого цвета (одна большая и 12 маленьких). Я начинаю рассказ:

— Жили были четыре армии — красная, синяя, зелёная и жёлтая. Вот это — их полководцы (бóльшие фишки), а остальные — солдаты. Давайте построим армии!

Мы строим каждую армию в ряд вслед за полководцем. Ряды получились неодинаковые по длине. Спонтанно, без моей инициативы, возникает дискуссия о том, где солдат больше. Андрюша находится на интересной промежуточной стадии: первоначально он сказал, что больше солдат в более длинном ряду (опираясь только на длину), но потом, когда я раздвинул короткий ряд и сделал его более длинным, он продолжал утверждать, что там, где было больше, там и осталось больше. Я, по свойственному мне отсутствию гибкости, не дал дискуссии развернуться, а пошёл дальше излагать задачу.

Я продолжаю:

— И вот эти армии всё время воевали друг с другом, и в конце концов им это надоело, и они решили заключить мир и в честь этого устроить великий пир. Они расставили столы (я раскладываю квадратики из ватмана), и за каждый стол село четыре воина, по одному каждого цвета. Но только садиться они должны были так, чтобы за каждым столом они сидели по-другому — такое было правило: только тогда мир будет прочным и они не будут больше воевать.

Я сам рассаживаю полководцев, потом все сразу хватают себе фишки и начинают расставлять (хотя я задумал работу по очереди). После этого поиск совпадений происходит довольно сумбурно. Первым находит совпадающие расположения Петя. Когда обнаруживается совпадение, они тут же одну из расстановок меняют, не задумываясь о том, что может снова получиться совпадение с каким-то другим столиком. Иногда (не без помощи Наташи) происходит путаница в постановке задачи — а именно, отождествление расстановок, полученных друг из друга поворотом.

[З а м е ч а н и е: всего возможны $4! = 24$ расстановки, но это для детей слишком много. Я выбрал 12 фишек исключительно из тех соображений, что ребят будет либо трое, либо четверо, а фишек должно хватить на всех поровну.]

Д о п о л н е н и е. Во вторник Алла предложила Диме доехать в лифте до 16 этажа. Он не достал до кнопки, после чего сам вспомнил задачу и понял решение. То же с Андрюшей: ему и подсказка не потребовалась, так как он и без того живёт на 14 этаже.

На занятии мне не приходило в голову представить себе, как мальчик входит в лифт, протягивает руку к кнопке и т. д. Тем более я не пытался представить себя на месте мальчика. — Дима.

Занятие 26. Пересекающиеся классы

21 марта 1981 года (суббота). 10^{35}—11^{00} (25 мин.) Дима, Петя, Женя.

Задание 1. Классификация с пересечением.

(1) Я предлагаю ребятам набор из 5 карточек (бабочка, ворона, самолёт, поезд, корабль) и прошу отобрать те из предметов, которые умеют летать. Затем мы собираем карточки обратно в кучу, и я прошу отобрать средства транспорта (то, на чём люди путешествуют). Возникает спор о самолёте. Дима считает, что его надо оставить с летающими предметами (чтобы разбиение было на непересекающиеся классы), Петя тащит к средствам транспорта. Женя подводит итог спору:

— Он общий!

Я хвалю Женю за найденное им удачное слово и спрашиваю (без всякой надежды на успех), на какую задачу это похоже. Неожиданно Дима правильно отвечает:

— На красные треугольники.

Я приятно удивлён, хвалю Диму и достаю верёвочки. Женя пытается положить карточку с самолётом на две верёвки (как когда-то пытался Дима), но Дима и Петя заявляют:

— Не так! — и делают всё как надо. Последующие наборы ребята раскладывают в верёвки сами, не дожидаясь, чтобы я объявлял классы, хотя я сам думал, что это потребуется.

(2) Набор: яйцо, рыба, гриб, ёлка, цветы. Справляются сразу:

— Вот это всё едят, а вот это всё растёт.

Петя сразу кладёт гриб в серединку.

(3) Набор: голубь, сорока, страус, жираф, ящерица. Произошёл казус: я по ошибке положил вместо картинки страуса картинку журавля, да к тому же, оговорившись, назвал его аистом. Приходится картинку перевернуть рубашкой вверх и считать страусом. Я публично признаюсь в ошибке. Алла, пользуясь случаем, рассказывает про птицу по имени коростель-дергач, которая водится у нас и тоже не умеет летать, но проходит пешком сотни километров на зимовку.

[Вообще-то определять классы через отрицание («не умеет летать») не следует, но набор картинок ограничивает. В дальнейшем надо будет картинки заказывать Алле.]

(4) Набор: маленькая девочка, две маленькие девочки, маленький мальчик, мужчина, старик. Задача вызывает неожиданные трудности: Дима сразу кладёт в середину старика со словами:

— Это хоть и дядя, но похож на тётю.

(На картинке изображён лысый старик с огромной бородой.) В итоге после многих проб задачу решает Петя.

Задание 2. Ребята получают карточки, на которых нарисованы некоторые множества предметов (цветок, карандаш, буква «А» и т. п., а также и по несколько предметов на одной карточке). Карточки кладутся на большой лист серой бумаги. Требуется показать стрелками отношение «это моя часть» (т. е. подмножество). Среди карточек присутствует также и пустое множество.

Главная трудность — дети безжалостно относятся к чистым, аккуратным и красивым карточкам и всё норовят начать рисовать свою толстенную фломастерную стрелку прямо с карточки. Несколько карточек, несмотря на все меры предосторожности и многократные предупреждения, оказались измазанными.

Дима первым догадался провести стрелку от одного из множеств к пустому, но никак не мог догадаться провести такие же стрелки от остальных множеств.

Вообще, хотя ребята с заданием вполне справились, у меня почему-то осталось ощущение, что они не очень понимали, что делали.

Занятие 27. Четырёхугольники на мозаике

4 апреля 1981 года (суббота). 10^{35}—11^{10} (35 мин.). Дима, Женя, Петя, Андрюша.

По-моему, Андрюше наши занятия изрядно поднадоели. Ему нужно соревноваться и побеждать, а у нас для этого очень мало возможностей. Заставлять его глупо, но просто взять и больше его не приглашать тоже нельзя. Вопрос в том, как сделать это тактично. Одна надежда — что Люда понимает эти проблемы лучше многих других*. По крайней мере, сегодня Андрюша в большой мере испортил нам занятие.

Задание 1. Перед занятием дети очень расшумелись, и, чтобы их успокоить, я предложил им досчитать до десяти и обратно очень тихим шёпотом. Но допустил ошибку, сказав, что самым большим молодцом будет тот, кто будет говорить тише всех. В результате после окончания счёта вместо ожидаемой тишины и сосредоточенности возникла склока о том, кто говорил тише.

Задание 2. Оно снова было на классификацию с пересечением. Поскольку ребята уже были с ним знакомы, я сразу положил на стол два пересекающихся верёвочных кольца и начал преамбулу:

— Помните, мы уже решали с вами задачи про общие элементы: с красными треугольничками, потом с карточками...

Но закончить мне не удалось: Андрюша, не дослушав, заявил:

— А, нет, я не хочу делать то, что уже было, мне неинтересно.

Я ответил:

— Если неинтересно, можешь не делать, просто посиди посмотри.

Тут Петя заявил:

— Мне тоже неинтересно.

(А ведь всего неделю назад он говорил Кате**, что математика ему нравится больше рисования и больше английского. И аргумент привёл неожиданный: потому что на рисовании и на английском мы играем, а на математике занимаемся серьёзным делом. У любви как у пташки крылья...) Не придумав ничего иного, я и ему сказал то же, что Андрюше. Немного подумав, и Дима — моя надежда и опора — сказал:

— Мне вообще-то тоже неинтересно, но я всё-таки буду решать.

Я не стал дожидаться мнения Жени и сказал:

— Ну, хорошо, для Димы и Жени вот набор карточек..., — но тут Андрюша увидел, что картинки на карточках совсем другие, т. е. и задание не то, что было, и закричал:

— А-а! Тогда я буду, буду! — и попытался сразу схватить себе все карточки, а следом за ним и Петя закричал:

— Я тоже буду!

Но настроение у меня уже испортилось, я был раздражён, тем более, что Андрюша не давал другим карточки, дрался с Женей и беспрерывно глупо и не к месту шутил, отвлекая всех от работы.

Мы успели рассмотреть три набора карточек (из подготовленных одиннадцати!):

(1) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, пальто, шапка (три предмета из резины, три предмета

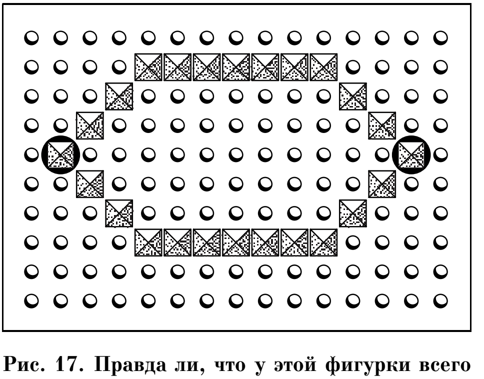


Рис. 17. Правда ли, что у этой фигурки всего два угла?

* Люда, Андрюшина мама — преподаватель музыки.

** Катя — мама Пети.

одежды; общий элемент — резиновые сапоги);

(2) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, погремушка, клоун (три предмета из резины, три игрушки; общий элемент — мяч);

(3) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, руль, кузов (три предмета из резины, три части автомобиля; общий элемент — шина).

В целом ребята решали задачи хуже, чем в первый раз. У Димы всё тот же дефект: он не умеет оставаться в рамках задачи, и его повышенная креативность лишена дисциплины. Так, в данном случае он упорно настаивал на том, что шина — это тоже «одежда», так как её можно надеть на пояс. Мы его долго переубеждали, после чего он заявил:

— Всё равно это одежда, потому что её одевают на автомобиль.

Первую задачу ребята не сделали, и мне пришлось показать её решение самому. В остальных двух задачах окончательный расклад карточек принадлежал Диме, но Женя и Петя оба раза ещё раньше говорили правильное решение устно.

Задание 3. Задачи на мозаике.

Диме: сложить треугольник (справился);

Андрюше: сложить квадрат (справился);

Жене: сложить прямоугольник (справился);

Пете (говорю, что это задание — самое трудное): сложить четырёхугольник, но не прямоугольник. Петя складывает шестиугольник; предлагаю сосчитать углы; Дима сразу заявляет, что углов — два, и показывает их (те, что выделены на рис. 17).

Женя кричит:

— Неправильно! — начинает сам правильно считать углы, но Дима, поняв свою ошибку и поняв, какие углы следует считать, отталкивает Женю и сам досчитывает до шести.

Диме переходит то же задание, что было Пете, он снова выдаёт нечто весьма неожиданное (рис. 18). Он говорит:

— Это четырёхугольник, потому что у него четыре угла, — и показывает углы (на рис. 18 выделены). Я его хвалю, говорю, что решение очень интересное, но что всё же нам нужна замкнутая фигура.

Андрюше — то же задание; он строит неправильной формы шестиугольник.

Жене — то же задание; Женя, наконец, находит правильное решение и строит параллелограмм с углом 45° (рис. 19).

На этом занятие кончается, но Петя не хочет уходить и требует, чтобы я выполнил его задание: он построит фигурку, а я должен построить такую же, повёрнутую на 90°. Я выполняю его задание, и он уходит удовлетворённый.

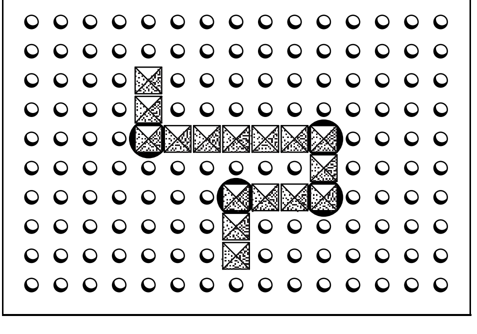


Рис. 18. Несколько неожиданный «четырёхугольник».

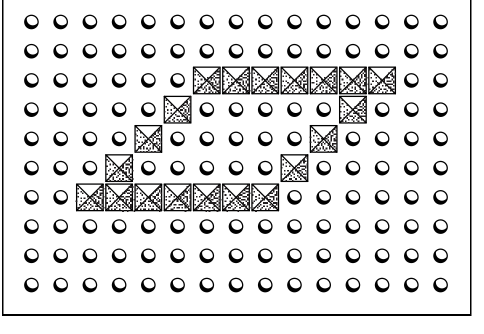


Рис. 19. Параллелограмм с углом 45°.

Занятие 28. Начинаем теорию вероятностей

11 апреля 1981 года (суббота). 10^{40}—11^{15} (35 мин.). Дима, Женя, Андрюша.

Задание 1. Продолжение классификации с пересечением. Я снова кладу две верёвочки и говорю:

— Смотрите, какие вам Алла новые картинки нарисовала, — с некоторым нажимом на слово «новые».

Не я один сменил тон: Андрюша, видимо, обработанный дома Людой, на этот раз гораздо более мягко спрашивает:

— А почему мы всё время одинаковые задачи решаем?

Я ему безжалостно отвечаю:

— А ты что — в прошлый раз все задачи легко решил?

Андрюша закусывает губу и молчит, на меня не смотрит. Я добавляю:

— Мы так делаем просто для того, чтобы научиться хорошо решать такие задачи.

Я договариваюсь с ребятами, что на этот раз будет строгий порядок и все будут решать задачи по очереди. Пока один свою задачу не доделает, остальные ему не мешают. Мне бы с самого начала усвоить кондовый школьный принцип: прежде всего — дисциплина! Всё шло бы гораздо глаже.

(1) Задание Диме: карандаш, ручка, пишущая машинка, швейная машинка, пылесос (3 инструмента для письма, 3 домашних машины; общий элемент — пишущая машинка). Дима говорит:

— Это то, чем пишут, — но в пересечение почему-то кладёт швейную машинку. Я спрашиваю:

— Разве этим пишут?

— Да.

— А что это?

— Швейная машинка. А-а! Ею не пишут, а строчат!

Тут Женя исправляет Диму, но Дима из чувства противоречия делает что-то уж совсем несусветное. После долгого обсуждения мы совместно восстанавливаем правильное решение. Ребята никак не могут сформулировать, что общего у «домашних машин». Я им помогаю, и мы обсуждаем, что можно было бы ещё положить в этот класс (мясорубку, стиральную машину, холодильник, . . .) и во второй (мел, кисточку, . . .).

(2) Задание Андрюше: песочные часы, ручные часы, будильник, кольцо, бусы (3 часов, 3 предмета, которые человек надевает; общий элемент — ручные часы). Андрюша правильно называет классы:

— Это часы, а это надевают, — но в пересечение почему-то кладёт будильник.

Мы обсуждаем его решение, я спрашиваю, надевают ли будильник. Женя снова вносит правильное исправление. Тут вмешивается Дима, начинает всё перекладывать и примерно с третьей или четвёртой попытки приходит к правильному решению. На этот раз Женя из чувства противоречия заявляет, что это решение (его собственное!) — неправильное, и опять всё перепутывает. Я восстанавливаю правильное решение, объясняю его. Неожиданно вмешивается Алла, которая придумала другое решение — «часы» и «круглые предметы» (в пересечении — будильник). Вообще демонстрация того факта, что возможны разные решения — дело полезное, но в данном случае именно такое разбиение (на «часы» и «круглые предметы») было предусмотрено в следующей задаче, так что эта вылазка Аллы фактически явилась подсказкой.

(3) Задание Жене: песочные часы, ручные часы, будильник, тарелка, барабан (3 часов, 3 «круглых предмета»; общий элемент — будильник). Женя сразу назвал правильные классы, но никак не решался положить карточки среди верёвок. А когда положил, то в середине оказались песочные часы. Он, однако, объяснил, что они круглые, если смотреть сверху. Мне пришлось согласиться, и я убедил Женю, что будильник надо тоже положить в пересечение. После этого мы ещё обсудили,

что было бы, если бы ручные часы тоже были круглыми (множество часов было бы подмножеством множества круглых предметов).

Задание 2. Подступы к теории вероятностей. В непрозрачную сумку-мешок я кладу два жёлтых и два чёрных кубика. Говорю, что это тёмный чулан, в котором лежит пара жёлтых и пара чёрных ботинок. Чтобы пойти в гости, надо достать обязательно пару (нельзя надеть разноцветные ботинки). Но из-за того, что чулан тёмный, приходится доставать ботинки наугад, один за другим.

Ребята по очереди тащат кубики из мешка и запоминают, сколько кубиков пришлось вытащить до получения пары. [Лучше было бы раздавать плашечки с цифрами из математического набора первоклассника.]

Мы обсуждаем, при каком количестве вытащенных кубиков получить одноцветную пару (а) нельзя; (б) можно, но не обязательно; (в) обязательно получится пара.

Затем то же самое задание повторяется с шестью кубиками (тремя парами). Во время моих объяснений Андрюша всё время отвлекался и явно скучал; Люда (впервые за всё время) делала ему замечания — видимо, с целью «подготовки к школе».

После кружка произошла следующая сценка. Женя (маленькая) носила кубики ко мне в кабинет и ставила на пол, а я переставлял их себе на стол. В тот момент, когда на столе было 6 кубиков, а на полу — 3, Дима сказал:

— А-а, там осталось всего три кубика!

Оказывается, он во время кружка умудрился сосчитать, что кубиков всего 12 (я столько заготовил на всякий случай), а сейчас устно решил задачу

$$12-(6+3)=3.$$

Характерно, что я с ним арифметикой совершенно не занимаюсь, только иногда отвечаю на его вопросы. Он постигает её самостоятельно. Через месяц ему будет 5 лет.

Занятие 29. Полный провал

18 апреля 1981 года (суббота). $10^{30}-10^{45}$ (15 мин.)
Дима, Петя, Женя, Андрюша.

Классификация с пересечением — окончание. Использованы наборы:

(1) окно, стакан, очки, кольцо, ремень (три стеклянных предмета, три предмета, надеваемых человеком; общий элемент — очки) [ср. с вопросом 4];

(2) рояль, скрипка, барабан, тарелка, будильник (три музыкальных инструмента, три круглых предмета; общий элемент — барабан) [ср. с вопросами 3 и 5];

(3) рояль, скрипка, барабан, диван, шкаф (три музыкальных инструмента, три предмета мебели; общий элемент — рояль);

(4) окно, стакан, очки, чашка, кружка (три предмета из стекла, три предмета, из которых пьют; общий элемент — стакан);

(5) будильник, тарелка, барабан, ложка, чайник (три круглых предмета, три вида посуды; общий элемент — тарелка).

Все задачи дети решили правильно. В пятой задаче они предложили другой вариант решения: поскольку чайник тоже круглый (если смотреть на него сверху), то в пересечении будут два предмета: тарелка и чайник.

После того, как с классификацией было покончено, я совсем было собрался перейти к следующему заданию. В этот момент Андрюша спросил:

— *А когда математика кончится?*

Я ответил, что она уже кончилась для тех, кому неинтересно, и что он может идти играть, если хочет, поскольку я никого не заставляю, и т. д. Но сказал я всё это не очень внятно и, честно говоря, несколько упавшим голосом. Наступило минутное замешательство, в течение которого я доставал мешок и цветные кубики, и тут Андрюша решился и сказал:

— Нет, я всё-таки пойду поиграю, — и убежал в детскую комнату, где в это время были Женечка, Саня и Андрюшина двоюродная сестра, тоже Саня, трёх лет (так ему всё это надоело, что он предпочёл общество трёх маленьких девочек). Следом за ним, ни слова не говоря, убежал Петя. После этого Женя неуверенно пробормотал:

— Я вообще-то уже всё решил, — и тоже убежал. Только Дима хотел заниматься ещё (отчасти это может быть связано с нашей беседой с ним в предыдущий день о его поведении на английском и о том, как важно самому хотеть заниматься). Он даже чуть не заплакал, когда я сказал:

— Потом.

Чуть не плакал я не от того, что теперь не будет урока, а от жалости к папе (он был такой грустный!) и от того, что я его утешал, а он не обращал внимания. — Дима.

Но нам уже было не до него: мы решали «педагогические проблемы». Причём проблемы эти касались не только детей, но и меня самого. Алла прекрасно знала, сколько души я вкладываю в эти занятия, и ей потребовалось немало такта, чтобы как-то меня утешить. Я же сам не знал, в какую крайность броситься: то ли забросить всё к чёртовой матери, то ли... что? Никакой другой идеи в голову, увы, не приходило. В неудобном положении оказалась также и Люда: с одной стороны, ей хотелось как-то защитить Андрюшу от нашего гнева, с другой — и нас не обидеть.

В итоге, после многочисленных общих и сепаратных обсуждений были приняты следующие решения:

1) *Андрюшу больше не приглашать**. Назавтра я поговорил с Людой в том плане, что не вижу смысла заставлять его делать то, что ему не нравится, что он ещё в школе успеет натерпеться, а пока пусть последние месяцы подышит спокойно, и что в конце концов он пропустит 3—4 занятия, так что потеря невелика. По существу, в этих словах нет никакого лицемерия. Ровно так оно всё и есть: и то, что не следует заставлять, и то, что ещё в школе натерпится. К тому же он в сентябре уже идёт в школу, а наш кружок — для дошкольников*. Жаль только, что всё это пришлось говорить не *до* всей этой истории, а после, и это придавало нормальным словам нежелательный оттенок. К тому же и моё состояние духа не совсем предрасполагало к переговорам: всем было видно, что я обижен.

2) *Ребят ни в коем случае не ругать.*

3) *Сделать перерыв.* Отчасти в надежде на то, что они сами спросят, когда же будет математика (раньше такое иногда бывало — даже с Андрюшей). Я некоторое время упирался, говорил:

— Пока сами не попросят, заниматься не буду.

Трудно придумать что-нибудь более глупое. Ребёнок живёт данным моментом, а не думает о том, что «должно произойти в субботу в 11 часов». Если же в субботу ничего не произойдёт, он скорее всего просто ничего не заметит.

Перерыв продлился три недели.

4) *Сделать следующее занятие резко непохожим на все предыдущие* (совет Риты Марковны**).

Мне бы как раз больше понравилось, если бы оно было такое же, как всегда. Я не помню, скучал ли я по кружку, но если скучал, то по тому, что было раньше, а не по чему-то новому. По крайней мере, я был неприятно удивлён, когда мы сели не на обычном месте, а в коридоре. — Дима.

Глядя из сегодняшнего далека, можно только удивляться, до чего же гипертрофированной была моя реакция. Я оказался в роли революционера, мечтавшего осчастливить человечество. А человечество, вместо того, чтобы

---

* Образ Андрюши, который предстаёт из этих заметок, совершенно не соответствует действительности. Всё из-за того, что пропущены первые 20 занятий, на которых он был таким же полноценным и активным участником, как и остальные.

* Через год пошли в школу Петя и Женя, но мы всё же продолжали заниматься, пока ещё через год в школу не отправился Дима.

** Имеется в виду Р. М. Фрумкина. Мы часто советовались с ней по самым разным поводам, и этот случай был одним из них.

с распростёртыми объятиями броситься мне навстречу, продолжало предаваться своим порокам. И вот я уже готов рубить головы...

Занятие 30. Переливание воды

9 мая 1981 года (суббота). 10^{10}—10^{40} (30 мин.) Дима, Петя, Женя.

Опыты с переливанием воды (сохранение количества вещества). Занимались в коридоре — с одной стороны, чтобы не испортить ковёр, но также и для создания «новизны обстановки».

Оборудование. Две кастрюли: в одной вода, подкрашенная заваркой чая, в другой вода, подкрашенная чернилами; две кружечки для наливания; две пустых молочных бутылки; два узких стакана; один широкий стакан; четыре фужера. Я договариваюсь с ребятами, чтобы они постарались ничего не разбить.

Вопрос первый. Я наливаю в бутылки поровну синей и жёлтой воды; ребята убеждаются, что поровну; после этого я разливаю жёлтую воду в два фужера и спрашиваю, какой теперь воды больше: жёлтой или синей? Вопреки всем моим ожиданиям Дима неожиданно даёт правильный ответ («снова поровну»), и даже правильно всё объясняет:

— Потому что та же самая вода, её только перелили. Ничего не добавляли и не убавляли.

Я пытаюсь не сдаваться: разливаю жёлтую воду по трём, потом по четырём фужерам (у Пиаже были такие испытуемые, которые меняли свою точку зрения, когда количество сосудов увеличивалось). Но Дима стоит на своём: воды столько же. Я с надеждой обращаюсь к Пете:

— А ты, Петя, как думаешь?

Но Петя, увы, думает так же, и Женя тоже.

Я обескуражен и смущён. Во-первых, вся моя программа построения познавательного конфликта по Смедслунду уже не нужна, так как дети и без меня всё освоили. Во-вторых, занятие, на которое возлагалось столько надежд, находится под угрозой: не прошло ещё и пяти минут от начала, а я уже едва ли не исчерпал всё, что задумал. С трепетом в душе я приступаю к следующему вопросу: если и сейчас ответят правильно, то это снова провал занятия, и что мне тогда делать?

Вопрос второй. Я наливаю в широкий стакан немного жидкости и предлагаю налить в узкий стакан столько же. Петя наливает воду до того же уровня (рис. 20).

У меня немного отлегло от сердца. Я спрашиваю, что будет, если воду из широкого стакана перелить в другой узкий стакан (пустой). Станет её больше или меньше? Ответ:

— Столько же.

— Значит, в двух узких стаканах будет поровну?

— Да.

Я переливаю воду. Ребята очень удивляются, что в одном из стаканов оказалось больше, но довольно быстро догадываются, что дело в ширине стакана. Следует длинное обсуждение того, как влияет ширина и высота на количество жидкости.

После этого мы ещё некоторое время занимаемся разными переливаниями. Дети понимают, что если нужно налить одинаковое количество жидкости в разные сосуды, то нужно сначала налить в одинаковые сосуды, а потом из одного из них воду перелить. Кроме

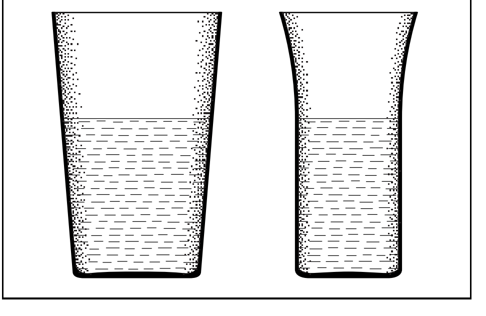


Рис. 20. Дети думают, что в этих стаканах одинаковое количество воды.

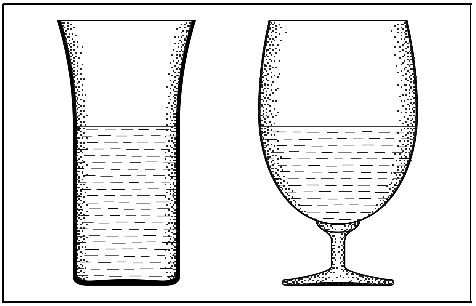


Рис. 21. А вот здесь воды и в самом деле поровну — это случайно так получилось.

того, переливание в одинаковые сосуды используется для проверки того, где воды больше.

Некоторую путаницу вносит то, что когда мы наливаем (правильно) поровну в узкий стакан и фужер, уровни воды оказываются одинаковыми, несмотря на разницу в ширине (рис. 21).

Потом, когда мы наливаем поровну воды в бутылку и в фужер и для проверки хотим перелить воду либо из бутылки в такой же фужер, либо из фужера в такую же бутылку, Женя предлагает сравнить уровень воды, приподняв дно бутылки на высоту дна фужера (рис. 22). При этом он правильно объясняет свои действия тем, что ширина у фужера и у бутылки одинаковая.

Это наталкивает меня на следующий импровизированный вопрос. Я ставлю узкий стакан на перевёрнутую вверх дном кружку (рис. 23). При этом дно стакана и дно фужера оказываются на одной высоте. Я прошу налить воды поровну в стакан и в фужер. Наливает Женя — и допускает ту же ошибку, что и Петя вначале. Но стоило мне только снять стакан с кружки, и он сразу догадывается, что допустил ошибку, и исправляет её.

Последний вопрос не связан с сохранением количества вещества, но связан с бутылками и водой.

Каждый из ребят получает листок с изображением двух бутылок. Одна из них стоит вертикально, а другая наклонена. В вертикальной — уровень воды обозначен (рис. 24), нужно нарисовать уровень воды в наклонённой бутылке.

Петя сразу сделал правильный рисунок. Женя подсмотрел у Пети и тоже сделал правильный рисунок (в данном случае тот факт, что он подсмотрел, не имеет большого значения; раз он нарисовал правильно, значит, согласно Пиаже, у него уже сформировалась соответствующая структура). Дима рисует неправильно — уровень параллелен дну.

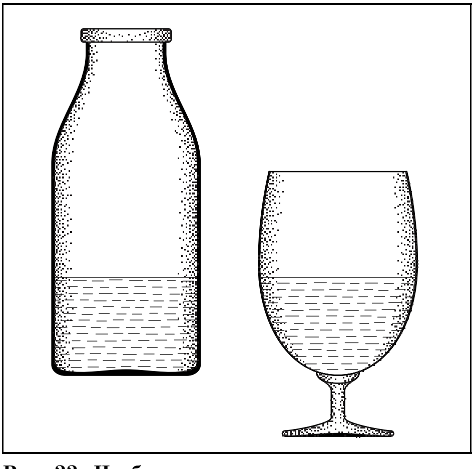


Рис. 22. Чтобы проверить, одинаковое ли количество воды в бутылке и в фужере, приподнимем бутылку так, чтобы её дно оказалось на одном уровне с дном фужера.

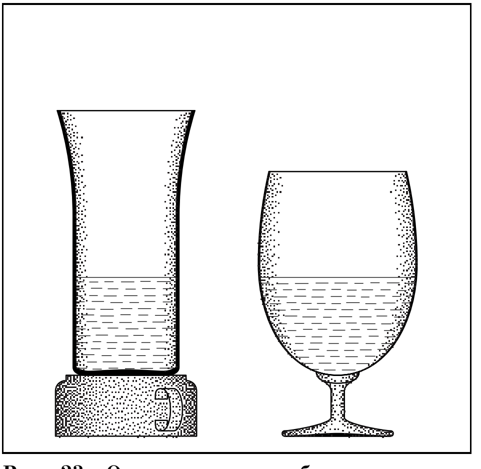


Рис. 23. Опять та же ошибка: воды здесь якобы поровну. Впрочем, на этот раз она быстро исправлена.

Я пытался не представить себе воду в бутылке, а угадать ответ. При этом, по-моему, мне было трудно сопоставить горизонтальный рисунок и вертикальную бутылку. — Дима.

Мы наливаем в бутылку воду и, наклоняя бутылку, показываем ему уровень. Дима делает попытку исправить рисунок, но на этот раз изображает уровень вертикальным, а потом даже кривым (рис. 25).

(Помню, не так давно я вычерпывал воду из ванночки ковшиком, и Дима спрашивал, почему так получается, что я всё время черпаю с одного края ванночки, но яма на этом месте не образуется, а вода всё равно остаётся ровной.)

Если бы меня спросили, получится ли так яма, я бы, наверное, ответил, что нет. Но я не понимал, зачем ещё можно вычерпывать воду, если не затем, чтобы получилась яма. А уж если сам Папа копает, то всё должно получиться. Папе я верил больше, чем своему опыту. — Дима.

Я ничего не объясняю, и занятие на этом кончается. Напоследок рассказываю историю про Крошку Ру, который очень не любил рыбий жир, а маме Кенге надо было обязательно его уговорить, потому что доктор велел выпивать в день по стакану (при этом я показал на узкий стакан). И тогда мама Кенга стала переливать рыбий жир из узкого стакана в широкий. Крошка Ру думал, что после переливания рыбьего жира становится меньше (его ведь теперь полстакана, и уровень ниже) и соглашался его выпить. Вот так и вылечился.

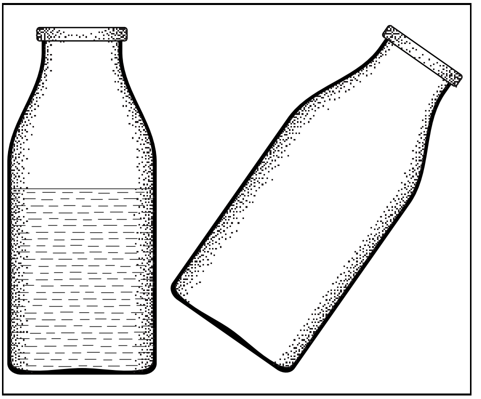


Рис. 24. Нарисовать уровень воды в наклонённой бутылке.

По моим, пока незначительным, наблюдениям дети-интраверты проявляют больше склонности к логическому мышлению, а экстраверты имеют бóльшие успехи в геометрии. К интравертам я отношу Диму и Женю, а к экстравертам, соответственно, Петю и Андрюшу (хотя никаких тестов на эту тему я не проводил, это всё — внешние впечатления).

Характерно, что Дима до сих пор часто проливает жидкости из сосудов (чай из чашки, воду из банки для рисования и т. п.), так как недостаточно следит за их горизонтальностью. Мы на него сердимся за неуклюжесть и невнимательность, а причина, возможно, в математике.

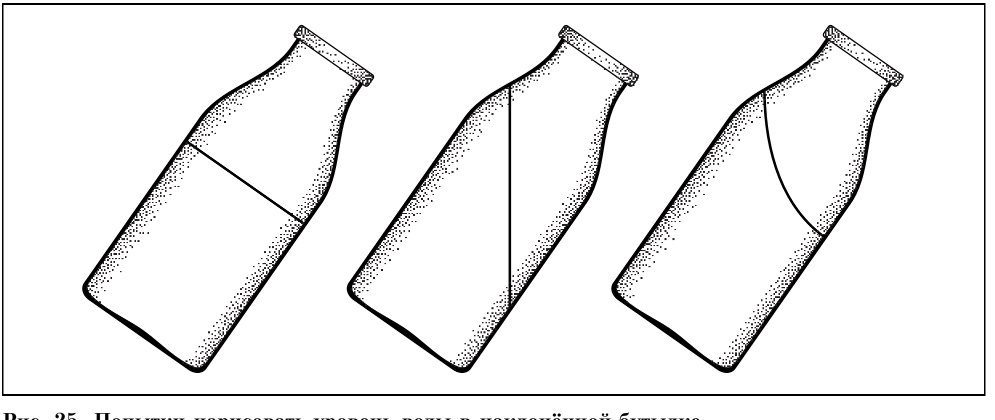


Рис. 25. Попытки нарисовать уровень воды в наклонённой бутылке.

Занятие 31. Снова теория вероятностей

16 мая 1981 года (суббота). 10^{35}—11^{00} (25 мин.). Дима, Петя, Женя.

Теория вероятностей — продолжение.

Задание 1. Я:

— Дима и Женя, наверное, сразу вспомнят игру, в которую мы играли, а Пети тогда не было, поэтому я расскажу всё с начала.

Я рассказываю про человека, ищущего пару ботинок, и про тёмный чулан. Кладу в мешок четыре пары кубиков — два жёлтых, два красных, два синих и два чёрных. Мы по очереди вытаскиваем кубики до тех пор, пока не образуется одноцветная пара. Каждый берёт себе плашечку с цифрой, показывающей, сколько ботинок ему для этого пришлось вытащить.

Я тоже участвую в игре. При этом мне достались четыре кубика всех четырёх цветов. Я обсуждаю с ребятами тот факт, что какой бы кубик ни оказался пятым, всё равно обязательно будет готовая пара.

Петя продемонстрировал, что такое везение: единственный раз за оба занятия вытащил сразу два одноцветных кубика.

Задание 2. Та же история про трёхногого человека. Мы кладём в мешок три жёлтых, три красных и три синих ботинка; цель та же — вытащить вслепую полный комплект обуви, три одноцветных ботинка. (Наташа пытается мне «помогать» и подсказывает, что это не ботинки, а варежки и шапка, но я настаиваю на своём варианте.)

Когда тащу я, у меня снова оказывается максимальный вариант: 6 кубиков, причём трижды по два цвета. Я снова пользуюсь возможностью и обсуждаю с ребятами тот факт, что какой бы кубик я сейчас ни вытащил (седьмым по счёту), у меня обязательно образуется полный комплект.

Задание 3. После того, как каждый вытащил кубики по одному разу, я убираю мешок и раскладываю все кубики на столе.

Последовательно для трёх, четырёх, пяти и шести кубиков мы показываем, как м о ж е т п о л у ч и т ь с я комплект и как м о ж е т н е п о л у ч и т ь с я комплект.

Потом я предлагаю сделать то же самое для семи кубиков. После нескольких проб дети заявляют, что при семи вытаскиваниях хотя бы один комплект получится обязательно. Я дополняю их опыт чем-то вроде доказательства.

Задание 4. Параллельно с обсуждением п. 3 я вытаскиваю сначала синюю бумажку — на неё мы кладём плашечки с цифрами 0, 1, 2 («невозможно получить комплект»). Затем появляется зелёная бумажка, и на неё мы кладём цифры 3, 4, 5, 6 («возможно, но не обязательно» получается комплект). Наконец, цифры 7, 8, 9 («обязательно» получается комплект) мы кладём на красную бумажку. (Интересно отметить, что упомянутые синестезии невозможности с синим цветом, обязательности с красным, а возможности

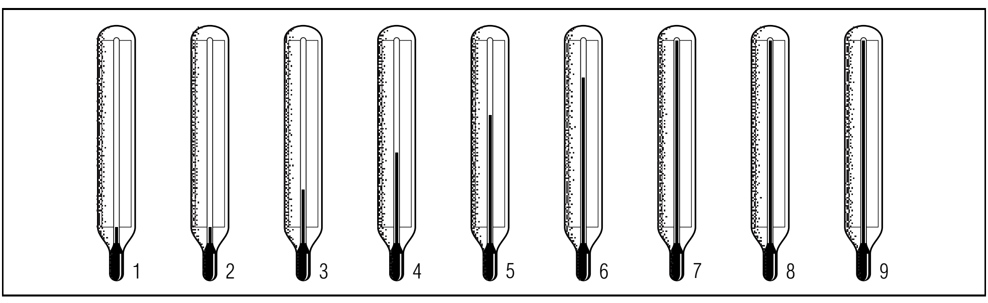


Рис. 26. Градусник, измеряющий надежду вытащить три одноцветных кубика.

с зелёным мы с Аллой предложили независимо друг от друга, что говорит в пользу того, что они выбраны в каком-то смысле правильно. Что-то вроде «холодно», «тепло», «горячо».)

Задание 5. Я рассказываю о том, что градусник измеряет температуру («тепло или холодно»), а я придумал другой, сказочный градусник, который измеряет «надежду на успех». Показываю рисунки, на которых нарисованы: градусник с нулевой высотой столба жидкости («невозможно»), с максимальной высотой («обязательно»), а также три градусника, показывающие ту или иную степень надежды. Мы обсуждаем, какой из этих градусников показывает больше надежды, а какой меньше. А теперь посмотрим, что покажет наш градусник в задаче про трёхногого человека. Я достаю лист (перфокарту), на котором нарисованы 9 градусников, и под каждым — цифра (от 1 до 9) и предлагаю на каждом градуснике показать карандашом уровень надежды на то, что мы вытащили три одноцветных ботинка. Однако мы с Димой должны были ехать к зубному врачу, и я уже спешил, поэтому для цифр 1, 2 (вероятность равна нулю) и 7, 8, 9 (вероятность равна единице) показал всё сам (и столб жидкости фломастером тоже рисовал сам), а ребятам оставил только цифры 3, 4, 5, 6. Они совершенно правильно показали уровень надежды повышающимся от цифры к цифре, и мы этот факт обсудили (рис. 26).

[Надо было ещё показать настоящий градусник и объяснить его устройство, так как нет уверенности, что они хорошо знают, как с ним обращаться.]

На этом занятие закончилось, я вскочил, и мы с Аллой побежали одевать Димку.

Занятие 32. Дипломы

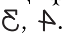
23 мая 1981 года (суббота). 10^{40}—11^{15} (35 мин.). Дима, Петя, Женя.

Заключительное занятие. Я говорю ребятам, что сегодня у нас последнее занятие в этом учебном году, и то задание, которое они сегодня получат, они должны постараться сделать очень аккуратно.

Задание 1. На отдельном листе бумаги я напоминаю ребятам обозначение операции сложения (+), а также знак равенства (=). Мы записываем несколько примеров на сложение.

Задание 2. Задание, аналогичное тому, что даётся в болгарском букваре. Каждый получает листок плотной бумаги (в уголке написаны фамилия и имя). Листок разграфлён отрезками прямых линий на множество клеточек неправильной формы (немногим более 20 клеток). Внутри каждой клетки написана задача на сложение, например, $3+2=$ (все примеры даны в пределах 7, т. е. 7 — наибольшая из получающихся сумм). Ребята должны выполнить все эти сложения и карандашом записать ответ.

Я проверяю результаты, исправляю ошибки (мы их стираем, и сложение выполняется заново), показываю пропущенные клеточки.

Дима пишет цифры 3 и 4 зеркальным образом: .

Приходится написать на листе бумаги крупно все цифры и положить перед ним на стол.

Первым справился Петя, не сделав ни одной ошибки (хотя и пропустив пару клеточек). Вторым кончил Дима, сделав одну ошибку, которую сам обнаружил. Неожиданные трудности у него вызвал пример $0+2$, он долго колебался и думал, не получится ли в результате 0. Женя работал медленнее других, но тоже допустил всего одну ошибку. Примеры $2+5$ и $3+4$ вызвали у него затруднение; я принёс ему счётные палочки, и он справился. Мальчики, уже закончившие, мешали ему, отвлекая и подсказывая.

В процессе работы Виталий* нас всех фотографировал.

Задание 3. Следующее задание — найти все клеточки с суммой 7 и закра-

* Виталий — папа Пети.

сить их красным фломастером. Я ещё раз призываю всех к аккуратности; советую сначала поставить в нужных клеточках красные точечки, потом мы вместе проверяем (каждый потерял по нескольку клеточек, я их показываю), затем начинается закрашивание. Получается большая красивая красная пятёрка. Но, даже закончив работу, ребята замечают это только после моего вопроса, когда я карточку показал издали. Дима очень удивился, как это так получилось.

Дипломы. Я демонстрирую мальчикам свой диплом об окончании университета, объясняю, что такое диплом, что он означает, что на нём пишется. Показываю вкладыш, в котором стоят оценки. Я объясняю также, что такое «оценка за год». После этого начинается торжественное вручение дипломов. Диплом сделан на типографском бланке «Диплома наставника молодёжи». Мы обрезали поля (в том числе лозунг «Пролетарии всех стран, соединяйтесь!»), на место серпа и молота наклеили картинку, нарисованную разноцветными фломастерами (три пересекающихся множества и ещё изогнутый лист бумаги, на котором нарисован граф с цветными стрелками), слово «Диплом» оставили, а слова «наставника молодёжи» заклеили словами «математического кружка». Далее следовал такой текст:

Этот диплом дан Диме Звонкину
за то, что он целый год
занимался математикой
и стал очень умным.

23 мая 1981 г.

(У остальных текст, естественно, такой же.)

Я объясняю, что та пятёрка, которую они нарисовали, — это их пятёрка за год, и что этот листок является вкладышем в их диплом. Дима спрашивает:

— А почему мы все получили пятёрки?

Я отвечаю:

— Потому что все очень хорошо занимались весь год. А кроме того, я считаю, что вы её сегодня вполне заработали: ведь если бы вы сосчитали что-нибудь неправильно и закрасили бы совсем не те клеточки, то и пятёрки у вас не получилось бы.

Последнее соображение вызывает оживлённое обсуждение: они только сейчас поняли, что результат зависел от их правильной работы. Потом все по очереди читают, что написано у них в дипломе. Кажется, они всерьёз поверили, что стали умными.

Я всех поздравляю с окончанием занятия и учебного года. Катя фотографирует каждого с дипломом в руках. После этого они долго сидят и хвастаются друг перед другом:

— А у меня пятёрка!

— А у меня тоже пятёрка!

— А у меня тоже пятёрка!

— А я умный!

— А я тоже умный!

— А у меня пятёрка!

И т. д., пока Дима не заявляет:

— Нам нечем хвастаться, потому что у нас всех одно и то же.

Несколько дополнительных задач

В этом разделе я очень бегло и без всяких комментариев даю список задач из первых двадцати занятий, которые удалось вспомнить (и которые не упоминаются в других местах).

Определение количества предметов без счёта.

1. Делается лесенка из кубиков (рис. 27). На каждую ступеньку кладётся цифра (по очереди). После этого для последних столбиков проверяется, соответствует ли количество кубиков в них лежащей сверху цифре.

2. Делается ещё один столбик из кубиков. Для определения количества кубиков в нём его прикладывают к лесенке.

3. Один мальчик берёт два раза по три кубика, а другой — три раза по два. У кого больше? Обсуждается вопрос, почему одинаково.

4. Аналогично № 1: кладётся ряд из кубиков, на нём сверху цифры. Количество кубиков в других рядах определяется прикладыванием.

5. Отправление писем, когда не хватает конвертов (попытаться разложить их по другим конвертам).

Комбинаторика.

1. Разложить треугольник, кружок и квадрат в разных последовательностях.

2. То же, но с тремя цветами.

3. То же с четырьмя предметами (два квадрата и два кружка).

Классификация.

1. Дана таблица 4×4. Слева нарисованы фигуры, которые помечают её строки: квадрат, круг, треугольник и полукруг. Сверху изображены цвета, помечающие столбцы: красный, синий, жёлтый, зелёный. Требуется каждый предмет (например, синий квадрат) положить в нужную клеточку.

Квантор общности.

1. На столе лежат несколько фигурок. Верно ли, что:

а) все треугольники — красные?

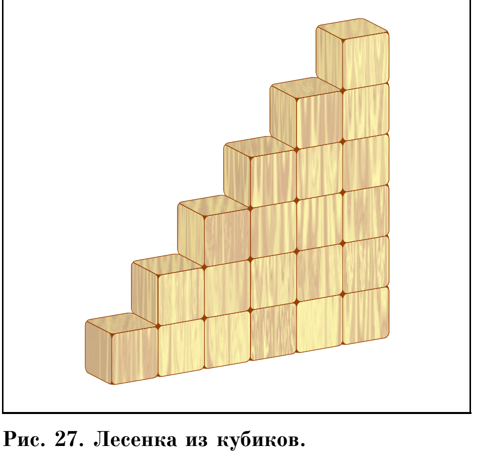


Рис. 27. Лесенка из кубиков.

б) все синие фигуры — кружочки?

в) все фигурки — без дырочек?

Порядок.

1. В трубочку закатываются три шарика: красный, синий и жёлтый. В каком порядке они будут выкатываться обратно?

2. Частичный порядок: в каком порядке мы надеваем разные предметы одежды и обуви (они нарисованы на карточках)? Ответить на вопросы:

а) что можно надеть раньше шубы?

б) что обязательно нужно надеть раньше шубы?

в) какие предметы одежды можно надеть последними?

г) какие можно снять первыми?

д) что можно снять только после шубы?

е) что можно снять и до, и после шубы?

ж) что нужно обязательно снять до шубы?

3. Я еду на работу сначала на автобусе, потом на троллейбусе, потом на метро, потом на трамвае. В каком порядке я еду обратно?

Симметрия.

1. Проводится прямая линия на листе бумаги и объявляется «зеркалом». Преподаватель проводит с одной стороны от неё произвольную загогулину. Требуется нарисовать ей симметричную. Результат можно проверить с помощью реального зеркала. Потом можно показать детям рисунки бабочек, цветов, и т. п., спросить, где у них «зеркало».

2. Усложнение предыдущего: загогулина лежит в стороне от линии, или, наоборот, пересекает её. Её можно также делать многоцветной.

3. То же задание можно повторить на мозаике.

Поворот.

1. Преподаватель рисует фигурку. Ученик должен нарисовать такую же фигурку, но не «стоящую», а «лежа-

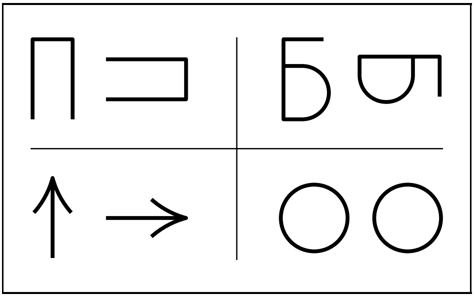


Рис. 28. Фигуры, повёрнутые на 90°.

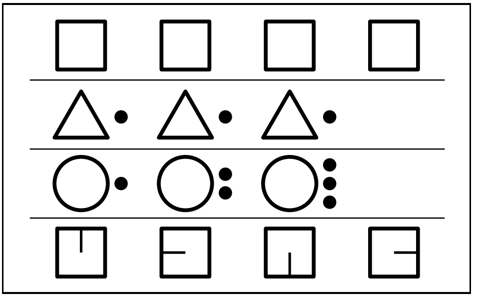


Рис. 29. Последовательность фигурок рисуется слева направо. Нужно угадать закономерность и продолжить.

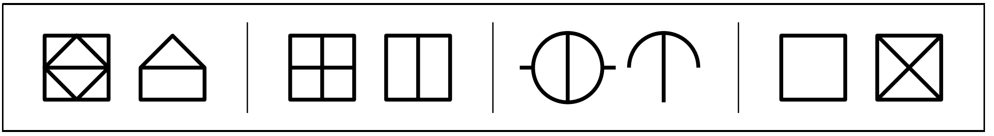


Рис. 30. Нарисовать всё то, что «отличает» одну фигурку от другой.

щую» (см. примеры на рис. 28). Предварительно можно повертеть карточки с фигурками.

2. То же самое задание на мозаике; то же, но с поворотом не по, а против часовой стрелки.

Р а з н о е.

1. Продолжить последовательность («узор»), рис. 29.

2. Даны пары фигурок (рис. 30). Для каждой пары нарисовать «разницу» между ними, т. е. то, что присутствует только на одной фигурке, но не на двух.

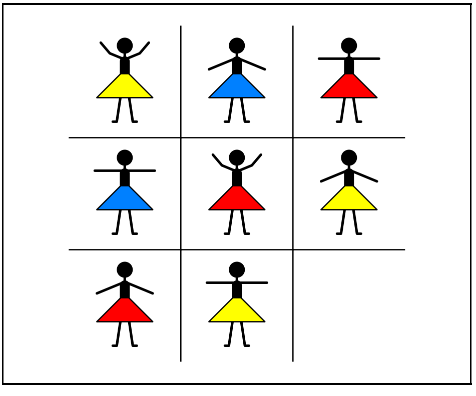


Рис. 31. «Пляшущие человечки». Добавить недостающего.

3. На мозаике построена фигура из красных и жёлтых фишек. Построить другую фигуру, заменив красные фишки жёлтыми, а жёлтые — красными.

4. Дана фигура. Построить такую же вверх ногами.

5. Диагональ делит прямоугольник и параллелограмм на два равных треугольника (бумажный параллелограмм разрезается по диагонали, после чего один треугольник накладывается на другой).

6. Задание, аналогичное № 22-3 (см. стр. 37), но все фигурки к тому же ещё раскрашены в три цвета.

7. У треугольника три угла. Один угол отрезали. Сколько осталось? (Ответ: четыре. Ведь если у треугольника отрезать угол, он превратится в четырёхугольник.)

8. У последнего «пляшущего человечка» (рис. 31) указать цвет юбочки и положение рук. Юбочки можно сделать разноцветными изначально, а можно попросить ребят их раскрасить потом (с условием, чтобы в каждой строке и в каждом столбце все цвета были разными).

9. Дан рисунок с разноцветными фигурками — типа того, что показан на рис. 32. К нему задаются вопросы: сколько здесь нарисовано:

а) кругов?

б) красных (синих, жёлтых, зелёных) фигур?

в) многоугольников?

г) невыпуклых фигур?

д) четырёхугольников?

е) прямоугольников?

ж) красных (и т. д.) многоугольников?

з) фигур (всего)?

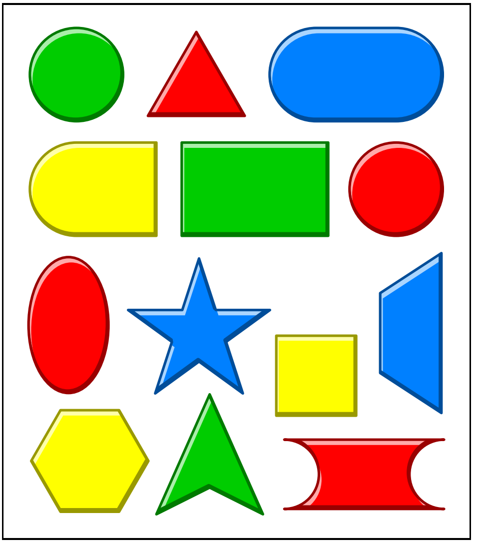


Рис. 32. Разноцветные фигурки.

Как рисовать куб?

Это — слегка затерявшаяся история: она записана на отдельном листке и без даты.

Однажды Дима сообщил мне:

— А я знаю, как рисовать куб. Мне показали.

— Ну, как же?

В ответ он нарисовал стандартную картинку, изображающую куб в «аксонометрической проекции» (рис. 33 слева). А я где-то читал, что детским рисункам более свойственна обратная перспектива (как в иконописи), и потому стал приставать с вопросами:

— А вот это что?

— Это верхняя сторона.

— А нижняя где?

— Её не видно.

— А почему верхнюю видно, а нижнюю не видно?

— Да-а... действительно...

Дима задумался. Потом сам добавил:

— И вот этот бок тоже видно, а вот этот нет.

После этого он взял кубик, взял фломастер, уселся на пол, обложился листами бумаги и стал разбираться. Трудился он никак не менее часа. Потом пришёл ко мне:

— Вот, папа, я всё понял.

И показал то, что изображено на рис. 33 справа, т. е. куб в обратной

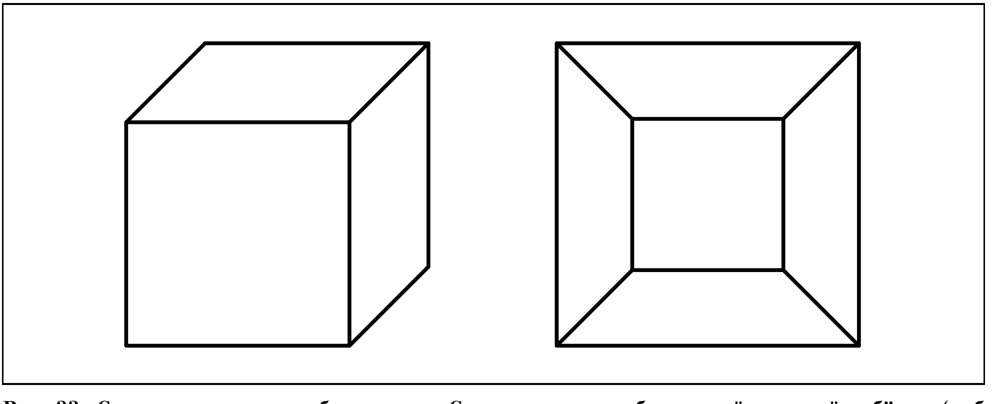


Рис. 33. Слева: так рисуют куб взрослые. Справа: рисунок, более свойственный ребёнку (куб в «обратной перспективе»).

перспективе, пояснив при этом, где у него верхняя сторона, где нижняя, где правая и где левая. Я сказал ему:

— Молодец!

Следует признать, что в этой истории присутствует оттенок догматизма с моей стороны. Уж если я решил, что не следует искусственно перетаскивать ребёнка на более высокий уровень развития, то буду даже стаскивать его обратно вниз, если это вместо меня посмел сделать кто-то другой. Не следует чрезмерно преувеличивать важность ни того, ни другого. Но вот что я безусловно ставлю себе в заслугу, так это час самостоятельной Диминой работы — целый час исследования вопроса о том, как же мы на самом деле видим куб и как его следует рисовать.

Хочу всё же добавить, что академик Б. В. Раушенбах в своих монографиях «Пространственные построения в живописи» (М.: Наука, 1980) и «Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы» (М.: Наука, 1986) показывает, что на самом деле существует много разных систем перспективы, и каждая из них имеет свои достоинства и свои недостатки. Обратная перспектива не лучше и не хуже классической ренессансной. Она больше подходит для изображения близких к нам предметов, а ренессансная — удалённых.

3

Дети и C_5^2: история одной задачи

В этой главе использованы материалы моей статьи «Дети и C_5^2» в журнале «Знание—Сила», № 2 за 1986 год.

Читатель уже мог заметить, что в наших занятиях, скажем, теорией вероятностей, нет ни определений, ни формул, ни теорем — ни даже арифметических подсчётов. Термин «теория вероятностей» используется просто за неимением лучшего. Ну, а что же тогда есть, если все эти стандартные математические ингредиенты отсутствуют?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно задать другой: а откуда вообще возникла теория вероятностей? Где её источник? Ясно: как и многие другие науки, как даже сама арифметика, теория вероятностей возникла из наблюдений над определёнными явлениями реального мира, а именно, над случайными, непредсказуемыми явлениями. Так во́т, как раз такие наблюдения, предшествующие науке, вполне можно проводить вместе с детьми. Не любые, конечно, лишь самые простые. Да дети и сами, без нас, этим занимаются — например, тогда, когда играют в игры с использованием игральной кости (кубика с написанными на нём очками от 1 до 6). В наших силах, однако, чуть-чуть выпятить, самую малость подчеркнуть вероятностную природу их наблюдений, а также познакомить их с тем, что вероятностный мир тоже несёт в себе значительное многообразие. Можно, например, вместо кубика предложить детям кособокий многогранник, чтобы они увидели, как игра становится «несправедливой»: одни цифры выпадают чаще, чем другие. Или можно придумать игру, в которой требуется считать сумму очков на двух костях. Здесь тоже дети рано или поздно заметят, что, скажем, сумма 7 выпадает гораздо чаще, чем сумма 2. В такого рода деятельности мы не ограничены ничем, кроме собственной фантазии и реальных возможностей реальных детей. Если дети поняли что-то, если какое-то зерно запало в разум — очень хорошо. Если нет — неважно; тогда, значит, мы «просто играли».

Попробую сформулировать ещё раз. Нас интересует не наука сама по себе как готовый продукт деятельности прошлых поколений, а те предварительные, предшествующие ей наблюдения, которые когда-то послужили толчком к её появлению.

В этой главе я хочу рассмотреть более подробно один пример. В главе 1 рассказывалось об одном занятии; в этой главе речь пойдёт об одной задаче. Всего одна задача — а сколько она даёт поводов для размышлений!

Комбинаторная задача

Задача эта относится к области комбинаторики. Когда-то такую науку проходили в школе, в девятом классе (имеется в виду школа-десятилетка). Потом сочли очень трудной (вспомните хотя бы такое пу́гало, как б и н о м Н ь ю т о н а!) и из программы исключили. А все трудности старшеклассников состояли попросту в том, что им приходилось сразу начинать с формул, не пощупав ничего руками. В данном случае выражение «пощупать руками» надо понимать буквально. Ведь в комбинаторике речь идёт о подсчёте количества тех или иных комбинаций предметов. Только самих предметов-то и нет — их надо вообразить, и комбинации тоже. Вот если бы начать с комбинирования реальных

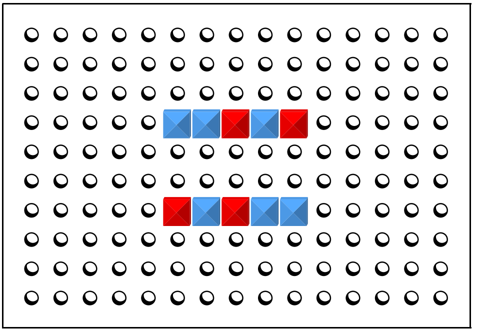


Рис. 34. Одинаковы ли эти бусы?

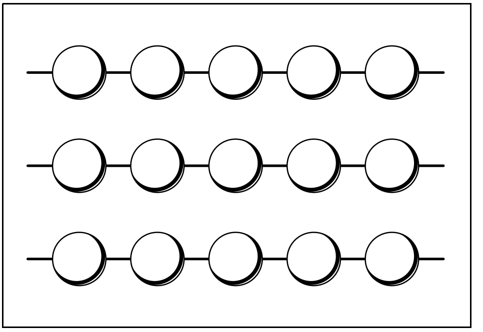


Рис. 35. Эти бусы изображены на бумаге; в каждой цепочке нужно закрасить две бусинки, но так, чтобы все бусы получились разными.

кубиков, фишек... Но кто же станет этим заниматься в девятом классе!

Мы рассаживаемся вокруг мозаики. Задание такое: надо построить «бусы» — цепочку из пяти фишек, в которой две фишки должны быть красными, а оставшиеся три — синими. Это, разумеется, можно сделать разными способами. Так вот, наша задача как раз и состоит в том, чтобы перебрать все способы и при этом избежать повторений. По науке эти последовательности называются *сочетаниями из пяти элементов по два*; их количество в отечественной литературе обозначается C_5^2, в англоязычной — $\binom{5}{2}$ и равно оно $\frac{5\cdot 4}{2}=10$. Ничего этого, конечно, дети не знают и на наших занятиях не узна́ют. Они просто строят бусы — по очереди, один за другим. Каждый результат проверяется всеми вместе — действительно ли он новый или совпадает с каким-нибудь из построенных ранее. Порой и спорим. Например, на рис. 34 изображено одно решение или два разных? На самом деле спорить тут не о чем: мы можем договориться, что эти решения разные, а можем — что одинаковые. Получатся две разные задачи, и обе вполне интересны. Но более лёгкая из них та, в которой эти бусы считаются разными, и я предлагаю так и считать.

В конце концов мы доходим до 10 решений.

Главный вопрос комбинаторики — сколько всего имеется решений. Но мальчики ещё очень далеки от него. Они вообще пока не видят разницы между «это невозможно» и «у меня не получается», и выражают твёрдую уверенность в том, что уж я-то могу построить и одиннадцатое решение, и двенадцатое, и вообще сколько захочу. Приходится взяться за дело мне самому. Ребята перебирали свои решения как попало, без всякой системы. Зато я демонстрирую образец систематичности: перебираю решения в строго определённом порядке. Сначала ставлю одну красную фишку на первое место, а вторую — поочерёдно на второе, третье, четвёртое, пятое места. Когда эта серия исчерпана, ставлю первую фишку на вторую позицию и т. д. Вы думаете, это производит впечатление? Ни малейшего. Единственное, что они поняли — это то, что у меня тоже ничего не вышло. (Как бы ещё не подорвать свой авторитет...) Отличить одно решение от другого они уже могут, а вот отличить порядок от беспорядка им пока не по силам. Надо отложить эту задачу эдак на полгодика. (А пока, может быть, приучать их аккуратно складывать все игрушки на свои места. Любопытно, связан ли порядок в игрушках с порядком в мыслях?)

Эквивалентные задачи

Прошло полгода, а может и больше, и задача появляется снова. Разумеется, я меняю её физическое оформление. Каждый получает листок, на котором нарисованы сцепленные друг с другом кружочки, по пять штук в каждом ряду (рис. 35).

Таких рядов заготовлено штук по пятнадцать — на случай неизбежных ошибок и повторений. Задача состоит в том, чтобы в каждой цепочке два кружочка закрасить, а остальные три оставить пустыми. Чемпионом будет тот, кто найдёт больше всего решений. И ещё одна деталь, на первый взгляд пустячная. Я даю всем ребятам фломастеры разных цветов, а в дальнейших обсуждениях этот факт старательно игнорирую: каждый раз два кружка можно закрашивать любым цветом. Дети не всегда понимают, какая деталь является важной, а какая не имеет отношения к делу, и я пытаюсь, как могу, подчеркнуть чисто комбинаторную природу задачи. Помнится, в другой группе я вместо кружков рисовал то пять квадратов, то пять треугольников и т. п.

Несколько минут самостоятельной работы (показывающей, между прочим, что задача на бумаге труднее задачи на мозаике — и это несмотря даже на прошедшие полгода), затем шумный обмен мнениями и результатами. Теперь у всех по 10 решений.

— А вы помните, у нас уже была один раз очень похожая задача?

Ведь вот как легко промахнуться, подставив свою точку зрения вместо ребячьей! Что значит похожая? Мне как-то казалось само собой разумеющимся, что похожая задача — это та, в которой тоже фигурировали сочетания из пяти предметов по два. А дети решили, что похожая — это когда они тоже что-то рисовали фломастерами. Не люблю подсказывать, но на этот раз приходится. Мальчики с радостью хватаются за мозаику, строят бусы на ней и даже сами догадываются сверить решения на мозаике и на листочках. Кто-то вспоминает, что в прошлый раз тоже получилось 10 решений. Это, наконец-то, повод для первого сомнения:

— А что, и правда больше нельзя построить?

Я загадочно улыбаюсь и перехожу к другому заданию...

Кажется, я набрёл на золотую жилу. Или лучше сказать — на нового Протея. Эта задача допускает необычайное обилие непохожих друг на друга физических обличий; поэтому к ней можно возвращаться множество раз. Вот, например, как выглядит очередной вариант. В порядке очереди каждый из участников получает листок клетчатой бумаги, на котором нарисован прямоугольник размером 3×4 клетки. (Секундный спор о том, квадрат это или нет, после чего можно формулировать условие задачи.) Итак, требуется нарисовать все возможные дороги из левого нижнего угла в правый верхний, но при одном условии: из каждой клетки можно передвигаться только направо

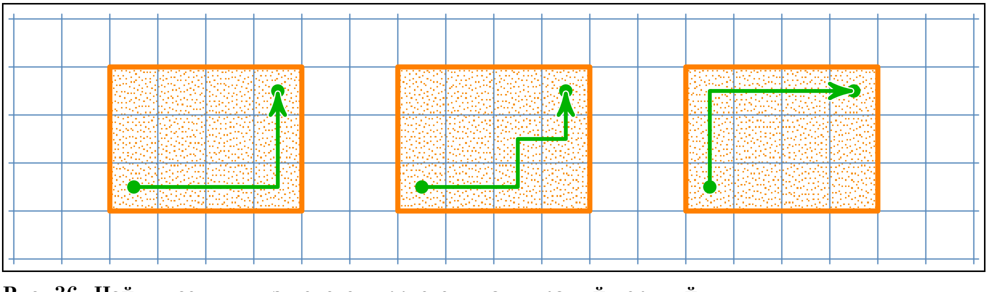


Рис. 36. Найти все пути из левого нижнего угла в правый верхний.

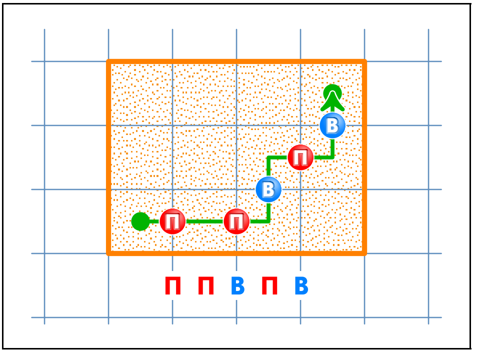


Рис. 37. Шаг вправо обозначается буквой П, шаг вверх — буквой В.

или вверх (рис. 36). Если вам, уважаемый читатель, не совсем ясно, как связана эта задача с предыдущей, потерпите немного — сейчас всё разъяснится.

Работа кипит — чувствуется возросшая квалификация моих «математиков»: и ошибок меньше, и все 10 решений найдены довольно быстро. (А меж тем мы того и гляди наткнёмся на новый подводный камень: мальчики уже начинают привыкать к тому, что во всех комбинаторных задачах ответом служит число 10. Не в этот раз, но в другой кто-то из них так и сказал: «Задача про 10». Надо срочно принимать меры — т. е. давать задачи с другим количеством решений.) Я, наконец, задаю главный вопрос: *чтобы пройти из угла в угол листочка, сколько шагов надо сделать направо и сколько вверх*? Увы, осечка. Я считаю шагом переход из клетки в соседнюю, а ребята — любой прямолинейный отрезок. Надо договориться о том, как правильно понимать слово «шаг». Договариваемся. Ну теперь-то уж ответ очевиден? Опять нет! Я в недоумении. После занятия обдумываю причину. А ведь и в самом деле, вопрос казался мне простым только по недомыслию. Ведь именно на этом свойстве — что количество шагов по горизонтали и по вертикали одинаково для всех путей — основано координатное представление векторов, т. е. тот факт, что при сложении векторов их координаты тоже складываются. Отчётливо помню, как когда-то меня, уже достаточно взрослого, поразило это свойство векторов. На его основе можно сделать хорошую серию задач и с её помощью даже дать намёк на отрицательные числа, если допускать шаги назад, но подсчитывать их со знаком минус. (Кажется, эта идея так и осталась нереализованной.)

Ну а пока, на занятии, мы старательно подсчитываем шаги: оказывается, каждая дорожка содержит ровно три шага направо и ровно два шага вверх. Поэтому на следующем занятии мы решаем «новую задачу»: пишем последовательности букв ВВППП, ВПВПП, ВППВП и т. д. — в каждой три буквы П и две буквы В. По замыслу каждая буква П означает шаг направо, а буква В — шаг вверх (рис. 37).

Надо было видеть то волнение, которое охватило ребят, когда я показал им эту связь! Они немедленно потребовали разрезать листок, на котором написаны наши пятибуквенные слова, и, отталкивая друг друга, стали прикладывать каждое слово к соответствующей дорожке. Я остаюсь сторонним наблюдателем, однако пытаюсь невзначай подкинуть ещё одну мысль.

— Может быть, мы заодно ещё какие-нибудь решения найдём, — говорю я. — Одиннадцатое, двенадцатое...

Один лишь Женя откликается на мои слова:

— Нет, — говорит он. — Ведь здесь десять и там тоже.

— Но, может быть, они разные? Здесь одни десять решений, а там другие?

К этому моменту, однако, все бумажки уже разложены, и наши надежды не оправдались: обе группы по 10 реше-

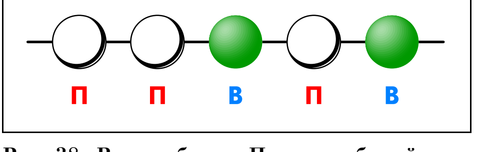


Рис. 38. Вместо буквы П рисуем белый кружок, вместо буквы В — закрашенный.

ний в точности соответствуют одна другой, или, как говорят математики, находятся во взаимно однозначном соответствии. Как тем не менее важно хотя бы на мгновение усомниться в результате, чтобы потом ощутить его как результат!

Сейчас, на волне энтузиазма, можно продвинуться чуточку дальше.

— А скажите, ребята, можно было обозначить шаги направо и вверх другими буквами? Не П и В, а другими?

— Конечно! Какими хочешь можно.

— Ну, какими, например?

— Например, А и Б, — говорит Петя.

— Или, например, твёрдый знак и мягкий знак, — это Дима.

— Или, например, — говорю я, — шаг направо обозначить плюсом, а шаг вверх — запятой.

— О-о-о! — хохочут мальчики.

— Или, — продолжаю я бесстрастным тоном, — шаг направо обозначать белым кружком, а шаг вверх — закрашенным.

— Как это?

— А вот так.

Я беру ту дорожку, что на рис. 37, беру соответствующее ей слово ППВПВ — и рисую рядом «бусы», показанные на рис. 38.

И в наступившей паузе — паузе перед взрывом — ещё успеваю соединить свои кружочки линиями, придав им окончательное сходство со второй задачей. Узнали! Тут ошибиться нельзя: озарение сопровождается радостным воплем и чуть ли не плясками. На столе всё смешивается, и продолжать дальше становится решительно невозможно. Пора кончать занятие. Теперь можно отступить примерно на месяц, отвлечься, позаниматься другими задачами. Пусть идея уляжется, пустит корни. К тому же однотипные задачи могут надоесть.

Обозначить...

Мы приближаемся к финишу. На столе пять коробок из-под спичек и два шарика: нужно класть эти два шарика в две коробки, оставляя остальные три коробки пустыми (рис. 39). И чтоб не повторяться.

Работа начинается вполне бойко, но уже на четвёртом или пятом шаге возникает ожесточённый спор, было уже такое решение или нет. Мальчики обращаются ко мне как к арбитру, но я делаю вид, что тоже не помню. Разумеется, с моей стороны это «домашняя заготовка»: вполне можно было набрать достаточное количество коробочек и шариков, разложить коробочки по пять в ряд, и получилась бы в точности та же задача, что и раньше. А сейчас каждое решение приходится сравнивать с теми, которые «были да сплыли». Как же быть?

Между прочим, далеко не каждый ребёнок сообразит, что делать в такой ситуации. Нужно о б о з н а ч и т ь одним значком пустую коробку, другим — коробку с шариком, и все найденные решения записывать. Но за этим скромным словечком «обозначить» прячется грандиозная идея, родившаяся и выросшая вместе с человеческой цивилизацией. Достаточно вспомнить во многом ещё загадочную историю возникновения письма, эволюцию пиктограмм в иероглифы, иероглифов — в алфавитное письмо и т. д.

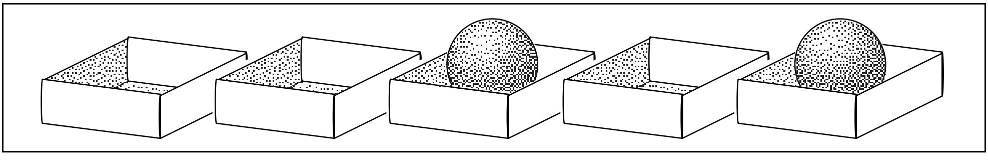


Рис. 39. Два шарика нужно положить в пять коробок разными способами. Главная трудность теперь в том, что нужно п о м н и т ь все уже использованные ранее варианты: ведь физически они на столе больше не присутствуют.

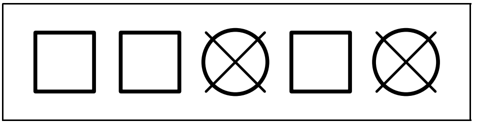


Рис. 40. Первая, вторая и четвёртая коробки пусты, в третьей и пятой лежит по шарику.

Сколько существует на свете математика, она всегда занималась изобретением и усовершенствованием систем обозначений — сначала для чисел, потом для арифметических операций, для переменных, и далее — для всё более и более абстрактных сущностей. Уже в XX веке учение о знаковых системах осознало себя в качестве самостоятельной науки — семиотики.

К более серьёзному разговору об использовании знаков мы ещё вернёмся в главе 5 (стр. 115). Пока же скажу лишь то, что на нашем кружке я всегда старался не только решать отдельные задачи, но и формулировать, хотя бы для себя самого, какие-то более общие цели. Знакомство с семиотической идеей — одна из таких «сверхзадач». Мы не раз обсуждали то, что числа обозначаются цифрами, звуки речи — буквами, а, скажем, музыкальные звуки — нотами. Вспоминали и другие системы знаков, например, дорожные знаки. Так что эта идея для моих кружковцев уже не совсем новая. Вот мальчики и предлагают р и с о в а т ь решения. Поначалу они и в самом деле пытаются делать что-то вроде реалистических рисунков; очевидно, они находятся пока на пиктографическом уровне. Но это трудно, и довольно скоро мы переходим на иероглифический уровень: рисунки становятся более абстрактными — теперь пустая коробка обозначается квадратом, а заполненная — квадратом с кружком внутри. Я предлагаю в последнем случае рисовать просто кружок. Очередное препятствие: дети не умеют рисовать аккуратно, и нарисованный ими круг не всегда легко отличить от квадрата. Я делаю ещё одно предложение: рисовать круг с крестом. Теперь, после всех этих эволюций, одно из решений выглядит так, как на рис. 40.

— А почему крестом?

— А какая разница, как обозначать, — отвечаю я. Это я пытаюсь равнодушным пожиманием плеч ещё раз намекнуть на ту идею, про которую специалист по семиотике сказал бы что-нибудь вроде: «Относительная самостоятельность знака по отношению к означаемому и его (в известных пределах) произвольность».

Между прочим, получившаяся задача в одном отношении сложнее предыдущих: теперь каждое новое решение нужно сравнивать не с другими решениями, а с их условными обозначениями. На этот раз мальчики находят всего 9 решений, и после нескольких безуспешных попыток приходят к выводу, что больше решений нет.

И вот, наконец, наступает минута моего триумфа, та, которую я так долго ждал и так упорно готовил. Петя вдруг восклицает, тыча пальцем в лист бумаги:

— Ой, смотрите! Пэ, вэ, пэ, вэ, пэ!

Дима вскакивает очень взволнованно:

— Да, да, папа, я уже давно хотел тебе это сказать!

— Значит, должно быть ещё одно решение, — подхватывает Женя.

— А давайте, — предлагает Дима, — принесём решение т о й задачи и найдём, чего не хватает.

У детей всегда — сказано—сделано: он уже бежит в кабинет, чтобы искать там нужные решения. Ходить, однако, далеко не приходится. Подобно известному роялю в кустах, конверт с решениями всех предыдущих задач оказался здесь же, на столе.

Мне было очень обидно, что «ходить далеко не пришлось». Во-первых, я зря пробе́гал в другую комнату за решением, а главное, я понял, что никакого открытия не было, а папа всё заранее подготовил. — Дима.

Мы обсудили, какой из вариантов — с буквами, с дорожками или с бусами — удобнее для нас, и выбрали бусы. Во время работы случился небольшой конфуз. Когда мы раскладывали полоски с «бусами», одна из них случайно перевернулась на 180°. В результате одно из прежних решений пропало, а другое, ему симметричное, оказалось повторённым дважды. Мы едва не запутались.

Я хотел сказать, что она перевернулась, но не стал, так как думал, что, может быть, это всё равно. — Дима.

Почему-то все ребята как один были убеждены, что недостающий вариант обязательно окажется последним. Тем не менее тот факт, что он вышел уже четвёртым, нисколько их не обескуражил. Они положили шарики в соответствии с этим новым вариантом, продиктовали мне рисунок десятой строчки, а потом разложили остальные бусы — каждые к своему рисунку. А я закончил задание с чувством абсолютного триумфатора.

То, что произошло сегодня, кажется мне крайне важным. Мы не просто решили задачу. Мы решили её путём сведе́ния к другой, изоморфной ей и уже ранее решённой задаче. Это — важнейшая общематематическая идея, и разве не чудо, что нашёлся такой материал, на котором эту идею удалось продемонстрировать шестилеткам? Да к тому же так, что они сами до неё додумались!

Доказательства

События на нашем кружке меняются с головокружительной быстротой. Не успели мы разобраться с одной великой идеей, как тут же на подходе другая. Как-то сам собой возникает вопрос: почему каждый раз получается ровно 10 решений? Их в самом деле больше не существует, или мы просто не сумели их найти? Как *доказать*, что их всего десять?

Итак, доказательство. Центральное понятие для всей математики, я бы даже сказал — *формообразующее*, выделяющее математику из всех других наук. Представление о том, что является доказательством и что не является, эволюционировало на протяжении веков и обрело современный вид лишь приблизительно на рубеже XIX—XX веков. Математикам прошлых эпох, даже самым великим, казались вполне убедительными такие рассуждения, которые сейчас с негодованием отвергнет любой школьный учитель. Если вдуматься, мы имеем дело с очень странным явлением. Почему какие-то абстрактные и порой совершенно «потусторонние» рассуждения делают для нас то или иное утверждение более убедительным? Один очень умный старшеклассник задал учителю такой вопрос:

— То, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, совершенно очевидно — можно убедиться на примерах. Тем не менее нам этот факт доказывают. С другой стороны, то, что электрическое напряжение равно силе тока, умноженной на сопротивление, нисколько не очевидно. Однако этот факт нам почему-то не доказывают, а только иллюстрируют опытами. Почему?

Такой вопрос — редкость. Большинство школьников воспринимают доказательства как некий принятый в математике ритуал. В математике так полагается, и всё тут. Как тут не вспомнить один исторический анекдот, относящийся, кажется, к XVIII веку. Один человек, бравший уроки математики, будто бы сказал своему учителю:

— К чему все эти туманные рассуждения! Ведь вы же дворянин, и я тоже. Дайте мне честное слово, что теорема верна — мне этого вполне достаточно.

Но не то же ли самое происходит с нами, когда мы читаем, скажем, учебник истории? Никаких доказательств, одни лишь «формулировки теорем»: было так, было там, было тогда. Точка. И вот оказывается, что «честное слово дворянина» — в данном случае автора учебника — вполне достаточно для того, чтобы всему поверить. На самом деле каждодневная работа математика не так уж сильно отличается от работы историка. Это иллюзия — полагать, что математик находит доказательство и на этом успокаивается, ибо в подавляющем большинстве случаев он производит на свет ложные доказательства. Но он видит, что тем же методом можно доказать, скажем, и иное, заведомо ложное утверждение — и он продолжает поиск, ищет ошибки, ищет противоречия, ищет другие пути к цели. Он осваивает новую область. И успокаивается только тогда, когда все части, все детали картины приходят в согласие друг с другом. Примерно такой же гармонии деталей, их согласованности друг с другом ищет и историк, да и любой исследователь. А потом в учебнике нам покажут только кратчайший путь из A в B. Стоит ученику сбиться с этого пути, «свернуть направо на один светофор раньше», и он попадает в совершенно незнакомый район и уже не знает, как оттуда выпутаться. В то время как специалист хорошо знает не только кратчайший путь, но и все окрестности — недаром же он их излазил вдоль и поперёк.

Однако дискуссия на эту тему увела бы нас слишком далеко. Поэтому вернёмся к детям. Материала, на котором можно знакомить детей с идеей доказательства, не так уж много, но он всё же существует. Например, задачи типа «четвёртый — лишний» с неоднозначными ответами. В них важно не только дать ответ, но и правильно его объяснить. Решали мы также и задачи такого типа: доказать, что мы видим глазами, а слышим ушами, но не наоборот (доказательство: если закрыть глаза, мы перестаём видеть, а если закрыть уши, перестаём слышать); доказать, что облака ближе к земле, чем солнце (доказательство: облака заслоняют солнце); доказать, что мы думаем головой, а не животом. Я сам так и не сумел придумать убедительного решения этой задачи*; на кружке же я предложил вот какое: если человеку отрубить голову, он перестаёт думать. Мне возражали, но никто не сказал, что то же доказательство проходит и для живота.

Ну а что могло бы послужить доказательством в нашей комбинаторной задаче? Ясно, что это должен быть *упорядоченный* перебор возможностей, т. е. такой перебор, при котором мы были бы абсолютно уверены, что ничего не пропустили. Год назад мальчики эту идею не восприняли. Может быть, сейчас они уже созрели?

Вернёмся к тому обсуждению, рассказ о котором мы прервали на полуслове. Итак, как же убедиться, что, кроме найденных десяти решений, других нет? Дима:

— Нужно много лет пробовать, и если ничего не найдёшь, значит, и нет.

Я возражаю:

— А вдруг всё-таки есть?

Женя пессимистично заявляет:

— Я больше ничего найти не смогу.

Петя спрашивает у меня, действительно ли я сам не знаю, сколько будет решений, или я-то знаю точно, а спрашиваю только для разговора. Признаю́сь, что сам я знаю точно. Тогда мальчики вообще перестают понимать, чего мне ещё надо. Выручил меня Дима. Он произнёс какую-то фразу... Откровенно говоря, я не очень уловил его мысль, и не очень вдумывался, так как думал в этот момент о своём. Но во фразе, которую он сказал, фигурировали слова «самая левая коробочка». Я за них ухватился и поспешил интерпретировать всю фразу в нужном мне направлении. Итак: возьмём первый шарик и положим в первую, самую левую коробочку. Куда теперь можно положить второй шарик? Это ясно: в одну из оставшихся, т. е. во вторую, в третью, в четвёртую и в пятую. Итого получаем 4 решения. Исчерпав все те решения, когда первый шарик лежит в первой коробочке, положим его во вторую. И опять для второго шарика остаётся 4 пустых места: мы можем его положить в любую из четырёх

* Видимо, такого решения и не существует. Сравнительно недавно я узнал, что древние египтяне, приготавливая мумии, аккуратно сохраняли для будущей жизни все органы человека, и только один мозг выбрасывали за явной ненадобностью.

коробочек, оставшихся пустыми. Теперь кладём первый шарик в третью коробочку и т. д. Одним словом, мы получаем 5 раз по 4 решения, то есть... 20 решений! Вот так раз! Мальчики в полном ошеломлении, а я как можно скорее сворачиваю все дела и заканчиваю занятие.

Ну, уж на этот-то раз я бил без промаха. Теперь наверняка все будут думать и разбираться, почему для правильного ответа число 20 ещё следует разделить пополам.

[Эх, чёрт побери! Обидно. Этот невыносимо честный Дима (нынешний) заставляет меня признаться, что я тут слегка приврал. Выдал желаемое за действительное. Я потом ужасно огорчался, что не сообразил поступить на кружке именно так, как написано выше. В реальности вместо этого я объяснил детям, почему будет именно 10 решений, а вовсе не 20, и почему, положив первый шарик во вторую коробку, уже не нужно класть второй шарик в первую. Жаль, красивая история пропала.

После этого был ещё долгий спор с Димой. Я сам его не запомнил и в дневник не записал, но вот что потом вставил туда он сам:

Поначалу папин систематический перебор меня не убедил. То ли в конце занятия, то ли уже после, я стал спрашивать:

— А вдруг ты всё-таки забыл один способ?

— Ну, например, какой?

— Какой-нибудь.

— Например, в какой коробочке может лежать первый шарик?

— Не знаю; в какой-нибудь.

— Ну, пусть, скажем, во второй.

— Пусть во второй.

— Но ведь тогда второй шарик может оказаться либо в 3-й, либо в 4-й, либо в 5-й коробочке, а мы все эти способы уже перебрали.

И тут я почувствовал (хотя, наверное, не признался бы в этом), что, действительно, для 11-го способа не осталось ни одной лазейки: куда бы мы ни положили первый шарик, всегда получится, что мы все такие способы уже перебрали. — Дима.

Так что, может, я и зря расстраивался. И без того понять мои рассуждения было трудно, а тут бы я нагромоздил одну трудность на другую.]

Физика и логика

Хочу рассказать об одной беседе с Димой. Ему 5 лет и 9 месяцев. Задним числом немножко странно, что с таким в общем-то маленьким мальчиком можно вести разговоры на такие серьёзные темы. Однако же вот — есть дневник... (С некоторых пор я стал записывать не только то, что происходило на кружке, но и какие-то смежные истории.)

Началось всё с несколько неожиданной и посторонней для нас темы: есть ли Бог? Я обычно уклонялся от прямого ответа (которого я, впрочем, и не знаю), думал — вот вырастет и сам решит для себя этот вопрос. Стратегия не очень успешная, так как общался он не со мной одним. Вот и сейчас — он уже от кого-то узнал, что «Бога нет, потому что его никто не видел». Я, как всегда, увёл разговор в свою сторону. Я сказал, что если дело обстоит таким вот именно образом, то он никак не сможет меня убедить в том, что существует м е ч т а (её ведь никто не видел, не правда ли?).

Дима сделал несколько подходов.

— А у тебя какая есть мечта?

Я ответил, что никакой мечты у меня нет.

— Ну, а что ты больше всего на свете хочешь?

Я отвечал, что ничего не хочу.

— Но ты ведь хочешь, чтобы я вырос умным?

Это уже было явное моральное давление, но я устоял: сказал, что вообще ничего не хочу, и всё тут.

На некоторое время он задумался; потом задал тот вопрос, из-за которого я, собственно, эту историю здесь и рассказываю: он спросил у меня, как вообще можно других людей в чём-то убедить.

— Есть разные способы, — ответил я. — В математике, например, придумывают д о к а з а т е л ь с т в а.

— Как это? — спросил Дима.

Я напомнил ему нашу совсем ещё свежую историю про 10 решений и про то, как мы старались сделать наш перебор систематическим, чтобы быть твёрдо уверенными, что мы ничего не пропустили.

— А в физике, — сказал я, — делают опыты.

— А-а, понятно.

(К тому времени мы уже читали книгу Л. Л. Сикорука «Физика для малышей» и производили некоторые из описанных в ней опытов.)

— Вот, например, такой вопрос: какие предметы падают быстрее — лёгкие или тяжёлые?

— Конечно, тяжёлые падают быстрее.

— Ты та́к думаешь. А другой человек может сказать, что все предметы падают одинаково быстро.

— Ну-у, нет!

— А почему нет?

— Ну, ведь если мы возьмём камень и лист бумаги, то камень упадёт быстрее.

— Вот видишь: чтобы убедить этого другого человека, что он неправ, ты сделаешь опыт, верно? Возьмёшь камень и лист бумаги и посмотришь, что упадёт быстрее.

— Да.

— А теперь давай сделаем другой опыт.

Идею этого опыта мне подсказал кто-то из друзей. Сначала мы берём два одинаковых листа бумаги, и они, разумеется, падают одинаково медленно. После этого я комкаю один из листов и скатываю его в плотный комок. Я хочу спросить, какой из двух листов теперь упадёт быстрее, но Дима меня опережает.

— А теперь вот этот (он показывает на комок) стал тяжелее.

— Почему!?!

— Потому что он упадёт быстрее.

Вот, оказывается, как обстоит дело. Для того, чтобы физический опыт мог вас в чём-то убедить, нужно сначала, чтобы ваша логика развилась до такого уровня, когда вы осозна́ете недопустимость логических кругов. Без логики никакие выводы из наблюдений сделать невозможно. Что же из них первично, а что вторично? Понятия не имею! Видимо, они вырастают вместе в каком-то симбиозе...

Я, однако, не унимаюсь. Мы продолжаем бросать в паре всё, что попадается под руку: пуговицу и большой тяжёлый лист ватмана; пуговицу и гирю; пластмассовый пустотелый кубик и деревянный кубик того же размера, и т. п. Дима обескуражен результатами. Попытался было предположить, что пуговица тяжелее листа ватмана, но быстро отказался от этой идеи перед лицом её очевидной нелепости.

— Значит, бывает по-разному. Иногда лёгкие вещи падают быстрее, а иногда тяжёлые.

Он уже почти готов удовлетвориться такой квазитеорией. И вдруг — эврика:

— А-а, понимаю, папа! Это ему воздух мешает падать.

— Кому?

— Лист большой, и ему воздух мешает падать, не пускает его. А пуговица маленькая, ей воздух меньше мешает.

— Правильно! А если бы воздуха не было, что бы тогда было?

— Тогда бы все падали одинаково.

— Молодец. А когда я лист бумаги скомкал в комочек, что произошло?

Дима подбирает слова, чтобы сформулировать ответ. Я не выдерживаю и отвечаю за него:

— Воздух ему перестаёт мешать.

— Нет, — поправляет меня Дима, — не перестаёт, а начинает меньше мешать.

Читатель уже знает, что один из моих ведущих принципов — это никогда не «внедрять» в ребёнка свою точку зрения, даже намёком. Но в иерархии принципов есть ещё один, более важный: никогда не следовать безоглядно ни одному принципу. Может быть, сейчас — удобный момент проявить гибкость? С явным намёком на «единственно правильный ответ» я указываю ещё раз на скомканный лист бумаги и говорю:

— И что, разве он действительно становится при этом тяжелее?

Дима смеётся вместе со мной: мол, ну надо же было сморозить такую глупость! Он отвечает:

— Ну конечно же нет! Может быть, только совсем немножечко тяжелее.

Вечером, записывая эту беседу в дневник, я обдумываю её ещё раз. Я неожиданно осознаю одно обстоятельство, которое раньше от меня ускользало. То, что мы произвели, не является в точном смысле слова физическим экспериментом. Эксперимент — это вопрос, заданный природе, с неизвестным заранее ответом. А в нашем случае Дима знал все ответы заранее. Не обязательно было реально бросать гирю с пуговицей — собственный опыт жизни ребёнка в окружающем его физическом мире оказывался вполне достаточным, чтобы правильно предсказать результат этого опыта. Можно сказать, что ни один из опытов не сообщил ему ничего нового — если говорить только о фактах. Новым было лишь сопоставление и упорядочение известных фактов. По существу, мы произвели то же самое доказательство путём перебора логических возможностей, которое раньше проделали с шариками в коробочках. Данная ситуация проливает некоторый дополнительный свет на то, почему в обучении так полезны вопросы. С помощью вопросов мы помогаем ребёнку сопоставить те элементы его жизненного опыта, которые до этого существовали как бы отдельно — лежали в кладовке памяти на разных полках и никак друг с другом не соприкасались.

* * *

Летом мы снимали дачу в Подмосковье, и к нам в гости приехал Петя. Мальчики вспоминали, как они недавно ходили в зоопарк, и как им показывали обезьян. Я вмешался в их разговор и сказал, что это не им показывали обезьян, а их показывали обезьянам. Такая инсинуация с моей стороны не могла не вызвать решительный протест, но они не сразу нашли, что ей противопоставить.

— Мы на них смотрели.

Такой аргумент разбить легче лёгкого:

— Ну и подумаешь, смотрели! Они тоже на вас смотрели.

Второй аргумент был гораздо серьёзнее:

— Мы можем ходить где хотим, а обезьяны не могут. Они в клетке сидят.

Но я и на это нашёл, что возразить.

— Нет, вы хóдите не где хотите. Например, вам нельзя ходить внутри клетки. А обезьянам нельзя снаружи. Просто есть решётка, и обезьяны ходят где хотят с одной стороны решётки, а вы — с другой.

Так мы ещё спорили некоторое время, и вдруг Дима воскликнул радостно, как бы поймав меня на подвохе:

— Ой, папка! Ведь это же мы опять математикой занимаемся!

Интересная эволюция... На самом первом занятии кружка дети бросились наперегонки считать разложенные на столе пуговицы. Тогда они именно так представляли себе математику — это когда считают. Теперь математика стала для них чем-то вроде логической игры в стиле Льюиса Кэрролла.

* * *

Немного жаль, что я лишил следующую главу некоторых из её наиболее лакомых кусочков. Но, во-первых, хотелось показать материал в новом разрезе: читателю трудно было бы самостоятельно уследить за развитием сюжета, прыгая от раздела к разделу. И, во-вторых, то, что я рассказываю в начале этой главы, относится к незаписанному периоду, т. е. вообще осталось бы за кадром. Будем надеяться, что кое-что интересное для следующей главы ещё осталось.