Лекция 12

18. Ряд Лорана[1]

18.1. Кольцо сходимости ряда Лорана.

Определение: Пусть z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости. *Рядом Лорана* называется степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Замечание: Суммирование в ряде Лорана следует понимать как предел следующих частичных сумм

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(z-z_0)^n$$

Запишем (пока формально, не заботясь о сходимости) ряд Лорана в виде суммы двух рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

Определение: Второе слагаемое в (1) называется *правильной (или регулярной)* частью ряда Лорана, в то время как первое слагаемое называется *главной* его частью.

Из теоремы Абеля и следствий из нее следует, что:

- регулярная часть ряда Лорана абсолютно сходится в некотором круге $|z-z_0| < R_1$ (будем считать, что $R_1 \neq 0$) и является в нем аналитической функцией;
- вне круга $|z-z_0| < R_1$ регулярная часть ряда Лорана расходится (причем при этом не выполняется необходимое условие сходимости).
- в любом меньшем круге $|z-z_0| < R_1'$, $R_1' < R_1$ регулярная часть ряда Лорана сходится равномерно.

Рассмотрим главную часть ряда Лорана. Сделаем замену $\xi = \frac{1}{z-z_0}$. Тогда главная часть ряда Лорана принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^n$$

Такой ряд абсолютно и равномерно сходится при $|\xi| < \frac{1}{R_2}$, что соответствует внешности круга $|z-z_0| > R_2$. Таким образом, используя теорему Абеля и следствия из нее можно констатировать, что

[1] Пьер Альфонс Лоран (1813-1854) - французский математик и военный инженер.

- главная часть ряда Лорана абсолютно сходится во внешности некоторого круга $|z - z_0| > R_2$ (будем считать, что $R_2 \neq \infty$) и является там аналитической функцией;

- внутри круга $|z - z_0| < R_2$ главная часть ряда Лорана расходится (причем при этом не выполняется необходимое условие сходимости).

- во внешности любого бóльшего круга $|z - z_0| > R_2'$, $R_2' > R_2$ главная часть ряда Лорана сходится равномерно.

Если $R_2 < R_1$, то существует общая область сходимости главной и правильной частей - *круговое кольцо* $R_2 < |z - z_0| < R_1$. При этом R_1 определяется при помощи коэффициентов c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ по формуле Коши-Адамара

$$R_1 = \frac{1}{L_1}, \quad L_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$$

А R_2 определяется при помощи коэффициентов c_{-n}, $n = 1, 2, \ldots$, причем

$$R_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$$

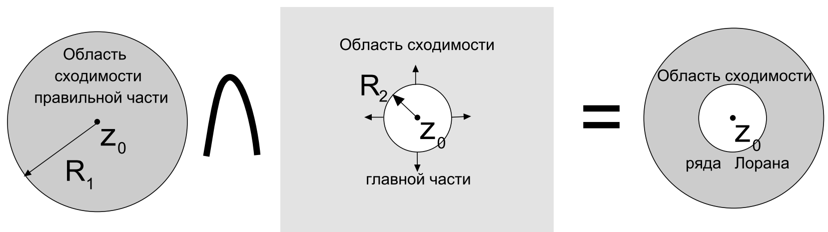

Рис. 1: Область сходимости ряда Лорана (кольцо) есть пересечение области сходимости его правильной части (внутренности круга $|z - z_0| < R_1$) и области сходимости его главной части (внешность круга $|z - z_0| > R_2$).

Из сказанного можно сделать следующие выводы:

- Так как оба ряда, как правильной, так и главной частей сходятся в кольце $R_2 < |z - z_0| < R_1$ *абсолютно*, ряд Лорана в целом также сходится абсолютно в этом кольце.

- Сумма ряда Лорана - функция *аналитическая* в кольце $R_2 < |z - z_0| < R_1$, как сумма двух аналитических функций, соответствующих правильной и главной частям.

- Вне замкнутого кольца $R_2 \leq |z - z_0| \leq R_1$ один из рядов, либо правильной, либо главной части расходится, причем при этом для него не выполняется необходимое условие сходимости. Таким образом, вне замкнутого кольца $R_2 \leq |z - z_0| \leq R_1$ ряд Лорана расходится (как сумма сходящегося и расходящегося рядов), причем там не выполняется необходимое условие сходимости.

- В любом меньшем кольце $R_2' < |z - z_0| < R_1'$, $R_2' > R_2$, $R_1' < R_1$, ряд Лорана сходится *равномерно*.

Подводя итог, подчеркнем, что область сходимости ряда Лорана - *некоторое кольцо*, которое можно нарисовать, найдя области сходимости его главной и правильной частей. Попутно следует заметить, что может оказаться, что область сходимости ряда Лорана отсутствует (при $R_2 > R_1$), вырождается во внешность некоторого круга (при $R_1 = \infty$), вырождается во всю комплексную плоскость без одной точки (при $R_1 = \infty$, $R_2 = 0$) и т.д.

Примеры:

1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(z+i)^n}$$

Это - ряд Лорана, у которого имеется только главная часть. Найти его область сходимости можно по признаку Коши

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{n \cdot 2^n}{(z+i)^n}\right|} = \frac{2}{|z+i|} < 1$$

Отсюда следует, что область сходимости этого ряда $|z + i| > 2$- внешность круга с центром в точке $z_0 = -i$ и радиусом $R = 2$.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{3^n} + 2^n z^{-n}\right)$$

Правильная и главная части ряда Лорана представлены, соответственно, рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{-n}$$

Используя формулу Коши-Адамара, нетрудно проверить, что ряд для правильной части сходится в круге $|z| < 3$, в то время как ряд для главной части сходится во внешности круга $|z| > 2$. Отсюда получаем, что рассматриваемый ряд Лорана сходится в кольце $2 < |z| < 3$.

18.2. Теоремы о разложении в ряд Лорана.

Теорема 18.1 (Теорема Лорана, существование). Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $T = \{R_2 < |z - z_0| < R_1\}$, то она разложима в этом кольце в ряд Лорана, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, причем коэффициенты c_n можно вычислить по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2}$$

где C - произвольная окружность, проходимая в положительном направлении, с центром в точке z_0, целиком лежащая в кольце T.

<u>*Доказательство:*</u>

<u>*Шаг 1*</u>. Возьмем произвольную точку z внутри кольца $T = \{R_2 < |z - z_0| < R_1\}$. Построим две окружности, $C_1 : |\xi - z_0| = R_1'$ и $C_2 : |\xi - z_0| = R_2'$, с центром в точке z_0 и радиусами R_1' и R_2', так, чтобы

$$R_2 < R_2' < |z - z_0| < R_1' < R_1$$

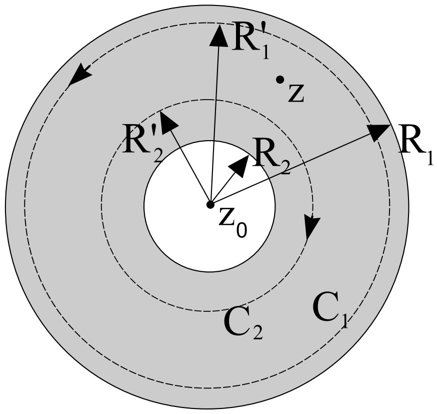

Рис. 2: К доказательству теоремы Лорана. Кольцо T и контуры интегрирования, используемые при доказательстве.

Применим к кольцу $R_2' < |z - z_0| < R_1'$ формулу Коши (это можно сделать, так как $f(z)$ в этом кольце аналитична и сама формула Коши применима для многосвязных областей). Получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^+} \frac{f(\xi)\ d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^-} \frac{f(\xi)\ d\xi}{\xi - z} = f_1(z) + f_2(z)$$

Здесь значки “+” и “−” над контуром интегрирования означают положительное и отрицательное направления обхода, соответственно.

<u>*Шаг 2*</u> (разложение функции $f_1(z)$). Обозначим

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = A$$

На окружности $C_1 : |\xi - z_0| = R_1'$ значение A не зависит от ξ, причем выполняется неравенство $A < 1$. Поэтому, используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, можно записать

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

По теореме Вейерштрасса этот ряд равномерно сходится на C_1 (мажорантный ряд $\frac{1}{|\xi-z_0|}\sum_{n=0}^{\infty} A^n$). Функция $f(\xi)$ аналитическая в заданном кольце T, следовательно она непрерывна и ее модуль ограничен на контуре C_1, целиком принадлежащем кольцу T. Поэтому данный ряд можно умножить на $f(\xi)$ и почленно проинтегрировать по C_1. Получим

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Шаг 3 (разложение функции $f_2(z)$). Обозначим

$$\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = B$$

На окружности $C_2: \ |\xi - z_0| = R_2'$ значение B не зависит от ξ, причем выполняется неравенство $B < 1$. Поэтому $\frac{1}{\xi - z}$ можно снова разложить, используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^k$$

По теореме Вейерштрасса этот ряд сходится равномерно на C_2 (мажорантный ряд $\frac{1}{|z-z_0|}\sum_{n=0}^{\infty} B^n$). Домножим этот ряд на $f(\xi)$ и проинтегрируем почленно по C_2 по ξ:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^-} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{C_2^+} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}\,d\xi$$

Обозначим $n = k + 1$. Тогда можно записать

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

где введено обозначение

$$c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^-} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\,d\xi$$

Шаг 4. Подынтегральные функции в выражениях для c_n и c_{-n} аналитичны в кольце T. Поэтому, в силу теоремы Коши, значения соответствующих интегралов не изменятся про деформации (непрерывной!) контуров интегрирования C_1 и C_2 в кольце T. Это позволяет записать общее выражение:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где C - произвольная окружность, проходимая в положительном направлении, с центром в точке z_0, целиком лежащая в кольце T. Окончательно, для $f(z)$ получаем

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Так как z- произвольная точка кольца T, ряд сходится к $f(z)$ всюду внутри данного кольца. Теорема доказана.

Теорема 18.2 (Теорема Лорана, единственность). Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $T = \{R_2 < |z - z_0| < R_1\}$, то ее разложение в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ единственно, причем коэффициенты разложения определяются формулами (2).

Доказательство: Докажем, что коэффициенты c_n определяются формулами (2) однозначно. Пусть имеется другое разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана,

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c'_m (z - z_0)^m$$

в том же кольце $R_2 < |z - z_0| < R_1$. Выберем окружность C_R радиуса R, $R_2 < R < R_1$ с центром в точке z_0. На этой окружности ряд сходится равномерно и поэтому его можно умножить на $(z - z_0)^{-n-1}$ (где n - любое целое число) и проинтегрировать по C_R в положительном направлении. Получим

$$\int_{C_R} \frac{f(z)\ dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c'_m \int_{C_R} (z - z_0)^{m-n-1}\ dz \qquad (3)$$

Далее используем то, что

$$\int_{C_R} (z - z_0)^{m-n-1}\ dz = iR^{m-n} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi}\ d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi i, & n = m \end{cases}$$

(при вычислении последнего интеграла была введена параметризация $z = z_0 + Re^{i\varphi}$). Таким образом в правой части (3) остается единственное слагаемое. Отсюда получаем

$$\int_{C_R} \frac{f(z)\ dz}{(z - z_0)^{m+1}} = 2\pi i c'_m$$

то есть $c_n = c'_n$ что и требовалось доказать.

Примеры:

1. Разложим в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ при $z_0 = 1$. Разложим $f(z)$ на простые дроби

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

Первая дробь уже является членом разложения в ряд Лорана. Для того, чтобы выписать разложение второй дроби, можно действовать двумя способами:

(a) Используем замену $w = z - 1$, тогда $z = w + 1$ и формулу суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n, \quad |w| < 1$$

Возвращаясь к исходной переменной z, окончательно получаем

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n$$

Разложение второго члена справедливо при $|z-1| < 1$. Соответственно, весь ряд сходится при $0 < |z-1| < 1$ (это кольцо, у которого внутренний радиус равен нулю, не путать с кругом!) Правильная часть ряда Лорана состоит из бесконечного числа членов, главная часть - из одного члена $\frac{1}{z-1}$.

(b) Опять таки, используем замену $w = z-1$, тогда $z = w+1$ и применим формулу суммы геометрической прогрессии, но по другому

$$\frac{1}{1+w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{-n-1}, \quad \left|\frac{1}{w}\right| < 1$$

Возвращаясь к исходной переменной z, окончательно получаем

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^n (z-1)^n$$

Разложение второго члена справедливо при $|z-1| > 1$. Соответственно, и весь ряд сходится при $|z-1| > 1$ (это кольцо, у которого внутренний радиус равен 1, а внешний - бесконечности.) Правильная часть ряда Лорана отсутствует, главная часть состоит из бесконечного числа членов. Наличие двух разложений в ряд Лорана для одной и той же функции *не противоречит* теореме о единственности разложения в ряд Лорана, так как эти разложения соответствуют *различным* кольцам, в которых раскладываемая функция аналитична.

2. Разложим в ряд Лорана с центром в $z_0 = 0$ функцию $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$. Используем тот факт, что ряд для функции e^w сходится во всей комплексной плоскости, поэтому для любого $z \neq 0$ имеем

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!z^n}$$

Выписанный ряд сходится во всей комплексной плоскости без точки $z = 0$, которую можно интерпретировать как кольцо, у которого внутренний радиус равен нулю, а внешний - бесконечности. Ряд Лорана в этом случае имеет бесконечную главную часть, а правильная часть представлена единственным членом 1, соответствующим $n = 0$.

18.3. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Определение: Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, сходящийся во внешности некоторого круга $r < |z| < \infty$ называется рядом Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом *главной частью* ряда Лорана в окрестности $z_0 = \infty$ называется $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а правильной - $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ (то есть, наоборот!)

Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки функции $f(z)$, которая аналитична во внешности некоторого круга, *существует*. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену переменной $\xi = \frac{1}{z}$, провести разложение функции $f(\frac{1}{\xi})$ в ряд Лорана в окрестности $\xi_0 = 0$ (это разложение существует по теореме Лорана) и вернуться к исходной переменной. Так следует действовать и на практике, когда требуется построить разложение в окрестности $z_0 = \infty$.

Выпишем в явном виде коэффициенты c_n разложения $f(z)$ при $z_0 = \infty$. Пусть разложение при $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^m$$

Умножим обе части этого равенства на z^{-n-1} и проинтегрируем в положительном направлении по окружности C_R, такой, что вне ее функция $f(z)$ уже не имеет особых точек. Получим

$$\int_{C_R^+} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{C_R^+} z^{m-n-1}\,dz$$

Так как (см доказательство единственности в Теореме Лорана)

$$\int_{C_R^+} z^{m-n-1}\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi i, & n = m \end{cases}$$

то получаем, формулу, аналогичную (2)

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+} \frac{f(z)\,dz}{z^{m+1}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пример: Разложим в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки функцию $f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)}$. Имеем

$$\frac{1}{z(z^2-4)} = \boxed{\text{замена } \xi = \tfrac{1}{z}} = \frac{\xi^3}{1-4\xi^2} = \boxed{\text{при } |\xi| < \tfrac{1}{2} \text{ - геом. пр.}}$$

$$= \xi^3 \sum_{n=0}^{\infty} (4\xi^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^{-(2n+3)}$$

Ряд сходится при $2 < |z| < \infty$ и состоит только из правильной части.