Лекция 13

19. Изолированные особые точки аналитической функции.

19.1. Понятие изолированной особой точки.

Определение: *Проколотой окрестностью* точки z_0 называется окрестность точки z_0 без самой точки z_0.

Определение: Точка $z_0 \neq \infty$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$ если существует такая проколотая окрестность точки z_0, $0 < |z - z_0| < \rho$, что

- функция $f(z)$ является аналитической[1] в этой проколотой окрестности;
- точка z_0 является *особой*[2] для функции $f(z)$;

Другими словами, в некоторой окрестности особой точки z_0 функции $f(z)$ не должно быть других особых точек этой функции.

Примеры:

(а) Функция $f(z) = \frac{1}{z}$, очевидно, является аналитической при $z \neq 0$. Точка $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой этой функции (она вообще единственная и ни в какой проколотой окрестности $z_0 = 0$ нет никаких особых точек).

(б) Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

Она имеет особые точки там, где знаменатель обращается в нуль, т.е. при $z_n = \frac{1}{\pi n}$, $n = \pm 1; \pm 2, \ldots$. Каждая из этих особых точек изолированная. Также имеется особая точка $z = 0$ (там где знаменатель не определен). В *любой* ее окрестности имеется бесконечно много особых точек z_n. Соответственно, $z = 0$ - *неизолированная* особая точка.

(в) Для функции

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Дело в том, что точка $z_0 = 0$ не попадает под *определение* изолированной особой точки в нашем понимании (см. начало параграфа 19), так как

[1] Напомним, что в нашем курсе подразумевается, что если функция аналитическая в области, то она в этой области однозначна.

[2] Определение особой точки - см. п.17.1

функция $f(z)$ не является однозначной. Если мы зафиксируем одну из двух ветвей функции $\sqrt{z}$, задав ее для точки $z = \rho e^{i\varphi}$, скажем, условием

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho} e^{\frac{i\varphi}{2}}}$$

то такая функция станет однозначной. Но она не будет даже непрерывной в любой проколотой окрестности точки z_0,так как $\rho e^{i\pi} = \rho e^{-i\pi} = -\rho$, но

$$\frac{1}{\rho i} = f(\rho e^{i\pi}) \neq f(\rho e^{-i\pi}) = -\frac{1}{\rho i}$$

Такой тип особых точек называется *точками ветвления* и в нашу классификацию не попадает.

Проколотую окрестность $0 < |z - z_0| < \rho$ можно интерпретировать как кольцо с внутренним радиусом, равным нулю. Так как $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности изолированной особой точки $z = z_0$, $0 < |z - z_0| < \rho$, по Теореме Лорана (Теорема 18.1) в этой проколотой окрестности функцию можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Очевидно, что если из ряда Лорана выкинуть главную часть, функция, представленная рядом правильной части "хорошо" себя ведет не только при $0 < |z - z_0| < \rho$, но и в точке $z = z_0$ (ее значение в этой точке равно c_0). Вообще, она аналитична во всем круге $|z - z_0| < \rho$. Таким образом, "особенное" поведение функции в точке $z = z_0$ определяется главной частью ряда Лорана. Далее мы рассмотрим три случая, когда главная часть ряда Лорана *отсутствует*, имеет *конечное* число членов и имеет *бесконечное* число членов.

19.2. Устранимая особая точка.

Определение: Если главная часть ряда Лорана с центром разложения в особой точке z_0 отсутствует, то z_0 называется *устранимой особой точкой.*

Теорема 19.1 Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда $f(z)$ *ограничена* в некоторой проколотой окрестности точки z_0, $0 < |z - z_0| < r$ т.е. $\exists M, r,\ |f(z)| \leq M$ при $0 < |z - z_0| < r$.

Доказательство:

Необходимость: Функция $f(z)$ является аналитической в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \rho$ (это следует из определения изолированной особой точки). Если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ отсутствует, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (1)$$

Соответственно, функцию $f(z)$ можно доопределить по непрерывности в самой точке z_0: $\lim_{z\to z_0} f(z) = c_0$. Из разложения (1) и теоремы Абеля следует, что в некоторой замкнутой окрестности $|z-z_0| \le r$, $r < \rho$ доопределенная таким образом функция $f(z)$ является аналитической, следовательно, непрерывной и, следовательно, ограниченной, т.е. существует M, такое, что $|f(z)| \le M$ при $|z - z_0| \le r$ ч.т.д.

Достаточность: Разложим $f(z)$ в ряд Лорана и рассмотрим выражение для коэффициентов главной части (см Теорему 18.1)

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\,d\xi, \quad n > 0$$

где C_a - некоторая окружность с центром в z_0 и радиуса a, целиком лежащая в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \rho$ (там, где функция аналитична). Сделаем замену $\xi - z_0 = ae^{i\varphi}$, $d\xi = iae^{i\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} |c_{-n}| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\,d\xi\right| \le \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + ae^{i\varphi})\right| \left|a^{n-1}e^{i(n-1)\varphi}\right| \left|ae^{i\varphi}\right|\,d\varphi \le a^n M \end{aligned}$$

Но a может быть взято сколь угодно малым, следовательно, при любом $n > 0$ коэффициенты $c_{-n} = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание: При доказательстве необходимости, мы увидели, что если изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ - устранимая, то существует *конечный предел*

$$c_0 = \lim_{z\to z_0} f(z) \tag{2}$$

Обратное утверждение тоже легко доказывается: если z_0 - изолированная особая точка функции $f(z)$ и существует конечный предел (2), то точка z_0 - устранимая. Это указывает на *практический путь* доказательства того, что z_0 - устранимая особая точка: если предел (2) существует и конечен, то изолированная особая точка функции $f(z)$ является устранимой.

Пример: Функция

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

имеет устранимую особую точку $z = 0$. Действительно, запишем разложение в ряд для нашей функции

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

У полученного разложения нет главной части. Функцию $f(z)$ можно доопределить по непрерывности значением $f(0) = 1$. Доопределенная функция является аналитической во всей комплексной плоскости. В любой замкнутой окрестности нуля эта функция является ограниченной.

19.3. Особая точка типа полюс.

Определение: Если главная часть ряда Лорана с центром разложения в особой точке z_0 содержит лишь конечное (но ненулевое) число членов, то такая точка называется *полюсом. Порядком полюса* называется такое наибольшее положительное n, что c_{-n} отлично от нуля.

Пример: Функция

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

имеет в нуле полюс порядка 2. Действительно, разложение в ряд Лорана для $f(z)$ при $z_0 = 0$ совпадает с самой функцией, правильная часть отсутствует, а $c_{-1} = -1$ и $c_{-2} = 1$.

Теорема 19.2 Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ (независимо от способа стремления к z_0).

Доказательство:

Необходимость: Пусть особая точка z_0 является полюсом порядка m. Так как особая точка z_0 является изолированной, функция $f(z)$ является аналитической в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \rho$. В окрестности z_0, по определению полюса порядка m, можно записать

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m+n} (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-m} \psi(z)$$

причем для $\psi(z)$ справедливо разложение

$$\psi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \dots$$

Этот ряд сходится во всей (не проколотой!) окрестности $0 \le |z - z_0| < \rho$, значит $\psi(z)$ - аналитическая (а, следовательно, и непрерывная) функция при $0 \le |z - z_0| < \rho$. Кроме того, $\psi(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Но тогда

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|\psi(z)|}{|(z - z_0)^m|} = \infty$$

что и требовалось доказать.

Достаточность: Если $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, то $\forall A > 0 \ \exists \varepsilon$, такое, что при любом z из проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ выполняется соотношение $|f(z)| > A$. Возьмем $A = 1$ и зафиксируем соответствующее ему ε. Выберем $r = \min\{\rho, \varepsilon\}$. Тогда для функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ получаем, что она аналитична в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < r$ точки z_0 и, следовательно, z_0 является для нее устранимой особой точкой. Более того, $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$, значит $g(z)$ можно доопределить в точке z_0 нулем. Таким образом, для доопределенной таким образом функции $g(z)$ заключаем, что существует такое натуральное число m, и аналитическая при $|z - z_0| < r$ функция $g_1(z)$, что

$$g(z) = (z - z_0)^m g_1(z), \quad g_1(z_0) \neq 0$$

(см параграф 17). Тогда

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m g_1(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

причем $\phi(z)$ - аналитическая в $|z - z_0| < r$ и $\phi(z_0) \neq 0$. Разлагая $\phi(z)$ в ряд Тейлора (это можно сделать, в силу аналитичности), получаем

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n$$

что и требовалось доказать.

Рецепт: (определения порядка полюса). Как следует из проведенного доказательства, в окрестности полюса z_0 порядка m функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

причем $\phi(z_0) \neq 0$. Тогда функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в точке z_0 *нуль m-го порядка.* Итак, порядок полюса z_0 для функции $f(z)$ совпадает с порядком нуля z_0 для функции $\frac{1}{f(z)}$. Как посчитать порядок нуля, см. п. 17.1.

Замечание: Справедливо и более общее утверждение (предлагается доказать самим). Пусть функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

причем функция $\varphi(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка m_1, а функция $\psi(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка m_2, причем $m_2 > m_1$. Тогда $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка $m_2 - m_1$.

Пример: Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z^3}$. Нетрудно проверить, что функция $\varphi(z) = 1 - \operatorname{ch} z$ имеет в точке $z_0 = 0$ нуль порядка 2, а функция $\psi(z) = z^3$ имеет, очевидно, в точке $z_0 = 0$ нуль третьего порядка. Таким образом функция $f(z)$ имеет в точке $z_0 = 0$ полюс порядка $3 - 2 = 1$.

Пример: Для уже рассмотренной функции

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

точка $z_0 = 0$ не является полюсом, несмотря на то, что при любом выборе ветви функции $\sqrt{z}$ получаем $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$. Как уже говорилось выше, такой тип особых точек называется *точками ветвления* и в нашу классификацию не попадает.

19.4. Существенно особая точка.

Определение: Если главная часть ряда Лорана с центром разложения в особой точке z_0 содержит *бесконечное число членов*, то точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Пример: Функция

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

имеет существенно особую точку $z = 0$. Действительно, в силу того, что ряд для экспоненты сходится во всей комплексной плоскости (см. стандартные разложения раздела 15.2), можно записать

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$$

Правильная часто представлена только одним членом с $c_0 = 1$, в то время как главная часть содержит бесконечное число членов.

Теорема 19.3 (Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса[3]) Если z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A (в том числе и $A = \infty$) существует последовательность точек $z_k \to z_0$, такая что $f(z_k) \to A$.

Доказательство:

Во-первых, существует последовательность $z_n \to z_0$, такая, что $f(z_n) \to \infty$. Если бы это было не так, то $|f(z)|$ был бы ограничен в некоторой проколотой окрестности точки z_0, а по Теореме 19.1 это бы означало, что z_0 - устранимая особая точка.

Во-вторых, для любого конечного числа A имеется одна из двух возможностей:

(a) в любой проколотой окрестности точки z_0 имеется точка z, такая, что $f(z) = A$;

(b) существует какая-то проколотая окрестность U точки z_0, в которой $f(z)$ не принимает значения A;

Если реализуется возможность (a), теорема доказана, так как последовательность z_k можно построить, взяв соответствующих окрестностях точки

[3]Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842-1927) русский математик. Теорема была доказана независимо Ю.В.Сохоцким и К.Вейерштрассом, причем работа Сохоцкого была опубликована за 8 лет до появления работы Вейерштрасса.

z_0, сжимающихся к самой точке z_0 (например, $0 < |z - z_0| < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$). Если же реализуется возможность (b), перейдем к рассмотрению функции

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

В-третьих, функция $g(z)$ является аналитической в этой проколотой окрестности U. Точка z_0 не является для $g(z)$ ни полюсом, ни устранимой особой точкой, так как в каждом из этих случаев существовал бы конечный или бесконечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(A + \frac{1}{g(z)} \right)$$

Таким образом, z_0 является существенной особой точкой для $g(z)$. Но тогда (см выше), имеется последовательность $z_k \to z_0$, такая, что $g(z_k) \to \infty$. Для этой последовательности имеем

$$\lim_{k \to \infty} f(z_k) = \lim_{k \to \infty} \left(A + \frac{1}{g(z_k)} \right) = A$$

что и требовалось доказать.

Задача: Для произвольного A придумать последовательность $z_k \to 0$, такую, чтобы $e^{\frac{1}{z_k}} \to A$.

Замечание: Пусть z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$. Рассмотрим предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Имеются следующие возможности:

- Этот предел конечен. Тогда мы можем заключить, что z_0 - устранимая особая точка функции $f(z)$, см раздел 19.2.
- Этот предел бесконечен. Тогда мы можем заключить, что z_0 - полюс функции $f(z)$, см раздел 19.3.
- Этого предела не существует. Тогда методом исключения можем констатировать, что z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$. На практике, доказать несуществование предела на практике можно различными способами, например:

  (a) указав одно из направлений в комплексной плоскости, по которому $f(z)$ не имеет предела при $z \to z_0$.

  (b) указав два способа приближения $z \to z_0$, таких, что $f(z)$ по ним имеет различные пределы.

  Выявлением ситуаций (a) и (b) удобно доказывать *на практике* наличие существенно особой точки.

Результаты наших исследований можно собрать в следующей таблице:

Тип особой точки	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$	Главная часть ряда Лорана
Устранимая особая точка	$\exists$ конечный предел	отсутствует
Полюс порядка m	∞, (но $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m$)	Содержит не более m членов
Существенно особая точка	Единого предела по всем направлениям не существует	Содержит бесконечное число членов

Замечание: Приведенная классификация применима только к изолированным особым точкам. В *неизолированной* особой точке вообще разложение в ряд Лорана несправедливо.

Замечание: В точке ветвления (например, $z = 0$ для функции $\sqrt{z}$) также разложение в ряд Лорана несправедливо, поэтому точки ветвления не относятся ни к одному из рассмотренных типов.

19.5. Особенность в бесконечно удаленной точке.

Будем считать, что $z = \infty$ *всегда* является особой точкой функции, если функция определена во внешности некоторого круга. Важно, однако, уметь определить тип особой точки $z = \infty$.

Определение: Точка $z = \infty$ является *изолированной* особой точкой функции $f(z)$, если $\exists R$, такое, что $f(z)$ не имеет особых точек при $|z| > R$.

Для определения типа особой точки $z = \infty$ используем преобразование $z = \frac{1}{\xi}$. Это преобразование переводит точку $z = \infty$ в $\xi = 0$. Будем считать, что тип особой точки функции $f(z)$, $z = \infty$ совпадает с типом особой точки функции $f(\frac{1}{\xi})$ при $\xi = 0$. Тогда оказывается, что наша классификация применима и к точке $z = \infty$, с той разницей, что, как мы знаем, главная и правильная части разложения при $z = \infty$ меняются местами.

19.6. Примеры.

1. Классифицируем особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$$

Очевидно, что $f(z)$ аналитическая всюду, кроме точек $z=0$ и $z=i$. Функция $g(z)=\frac{1}{f(z)}=z(z-i)^2$ имеет $z=0$ нулем первого порядка и $z=i$ нулем второго порядка. Отсюда следует, что $z=0$ и $z=i$ являются для $f(z)$ *полюсами первого и второго порядка* соответственно.

Отдельно следует рассмотреть особую точку $z=\infty$. Так как существует предел

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(z-i)^2}=0$$

то точка $z=\infty$ является *устранимой* особой точкой функции $f(z)$.

2. Классифицируем особые точки функции

$$f(z)=z\sin\frac{1}{z}$$

Функция $f(z)$ является аналитической всюду, кроме точки $z=0$. Запишем для $f(z)$ разложение в ряд, справедливое во всей комплексной плоскости, кроме точки $z=0$

$$f(z)=z\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+2}}{(-2n-1)!}$$

Оно, очевидно, содержит бесконечное число отрицательных степеней z, следовательно, $z=0$ - *существенно особая точка.* Отдельно следует рассмотреть особую точку $z=\infty$. Сделаем замену $z=\frac{1}{\xi}$, тогда $f(\frac{1}{\xi})=\frac{\sin\xi}{\xi}$. При $z\to\infty$ имеем $\xi\to 0$ и так как существует предел

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\sin\xi}{\xi}=1$$

то $z=\infty$ является для $f(z)$ *устранимой* особой точкой.

3. Классифицируем особые точки функции

$$f(z)=\frac{z}{\sin z}$$

Функция $f(z)$ имеет особенности в точках, где знаменатель обращается в нуль т.е. $z_k=\pi k$, k - целое. Сразу же заметим, что существует предел

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$$

поэтому при $k=0$ особая точка $z=0$ - устранимая. Для исследования остальных особых точек рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{\sin z}{z}$$

Выясним порядок нулей z_k, $k\neq 0$. Возьмем производную

$$g'(z)=\left(\frac{\sin z}{z}\right)'=\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}$$

При $k \neq 0$ имеем

$$g'(z_k) = g'(\pi k) = \frac{(-1)^k}{\pi k} \neq 0$$

следовательно, $z_k = \pi k$ при $k \neq 0$ являются нулями функции $g(z)$ ***первого порядка***. Следовательно, они же являются полюсами первого порядка функции $f(z)$. Последовательность z_k неограничена, следовательно, во внешности любого, сколь угодно большого круга содержится бесконечно много особых точек z_k. Отсюда следует, что $z = \infty$ является ***неизолированной*** особой точкой функции $f(z)$.